И. Н. Сергеев, В. С. Панферов

C1
C2
C3
C4
C5
C6

ЕГЭ 2010
Математика

Задача С3

Уравнения и неравенства

Под редакцией
А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Разработано МИОО

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

И. Н. Сергеев, В. С. Панфёров

ЕГЭ 2010. Математика
Задача С3
Уравнения и неравенства

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Москва
Издательство МЦНМО
2010

УДК 373:51
ББК 22.1я72
С32

Работа выполнена при поддержке РГНФ
(*проект* № 08-06-00144а)

Сергеев И. Н., Панфёров В. С.

С32 ЕГЭ 2010. Математика. Задача С3 / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2010. — 72 с.

ISBN 978-5-94057-593-1

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2010. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи С3.

Книга посвящена решению уравнений и неравенств. В ней рассмотрены и прокомментированы все основные типы уравнений и неравенств, соответствующие школьной программе по математике. Предложены различные методы их решения, которые применимы и к другим задачам ЕГЭ 2010 г.: типа С (С1, С5, С6) и типа В (В3, В7, В10, В11, В12). Кроме того, в книге собраны воедино необходимые справочные сведения по каждой теме, даны диагностические работы разного уровня, предложены задачи для самостоятельного решения, а также приведён список литературы для подготовки к экзамену.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по алгебре и началам анализа.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

ББК 22.1я72

ISBN 978-5-94057-593-1

Предисловие

Книга продолжает серию учебных пособий по математике под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко, посвященных подготовке к ЕГЭ по математике в 2010 г.

При решении практически любой математической задачи приходится производить преобразования числовых, алгебраических или функциональных выражений. И хотя сами эти преобразования не являются самоцелью, они представляют собой довольно эффективное средство (причём иногда — чуть ли не единственно возможное) для решения задачи.

Сказанное особенно относится к задачам на решение уравнений или неравенств. Именно таким задачам и посвящена настоящая книга, в которой рассмотрены основные типы уравнений и неравенств, а также различные методы их решений.

Читателю предлагаются несколько наборов диагностических задач. Каждый такой набор включает в себя рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические, содержащие модули (абсолютные величины) и комбинированные уравнения и неравенства. Начальная диагностическая работа содержит задачи, которые разбираются далее в каждом параграфе. Уровень сложности задач следующих шести диагностических работ возрастает с ростом номера работы.

В каждом параграфе приведены задачи для самостоятельного решения (тренировочные и подготовительные). В случае возникновения непреодолимых трудностей при решении каких-либо задач переходите к более простым, подготовительным задачам по соответствующей теме. После этого снова возвращайтесь к тренировочным задачам. В конце книги имеется список литературы для самостоятельной подготовки к экзамену.

Наши рекомендации таковы:

— выполните диагностическую работу и сверьте полученные Вами ответы с ответами в конце книги — каждая нерешенная задача и каждый неверный ответ является для вас сигналом к действию;

— внимательно прочитайте предложенные методические рекомендации и примеры решений всех задач диагностической работы, сравнив их с текстами ваших решений и обратив особое внимание на имеющиеся различия между ними;

— последовательно решайте диагностические работы 1—6 (расположенные в порядке возрастания трудности задач), перемежая их с тренировочными и диагностическими задачами — прежде всего по тем темам, которые вызывают наибольшие затруднения.

Надеемся, что навыки решения задач, предлагаемых в настоящей книге, помогут школьникам в будущем успешно сдавать самые разные экзамены по математике.

Авторы благодарны А. В. Семёнову, прочитавшему всю рукопись, сделавшему ряд содержательных замечаний и предложений, улучшающих текст в целом.

В подготовке настоящего издания большую помощь авторам оказали студенты механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова А. Трепалин, А. Годнева, О. Заплетина, И. Нетай, которые прорешали все задачи и выверили ответы к ним.

И. Н. Сергеев, В. С. Панфёров

Введение

Если первая часть варианта ЕГЭ 2010 г. представлена задачами типа В (с кратким ответом), то вторая его часть состоит из шести задач типа С (с развернутым ответом), среди которых задача С3 имеет повышенный уровень сложности.

Основной целью этой, так сказать, «вузовской» части варианта (в отличие от первой его части, носящей характер «зачета» по курсу математики средней школы) является дифференциация выпускников в отношении их возможностей дальнейшего обучения в вузах с различными требованиями к математической подготовке учащихся.

Задания всей части 2 в целом предназначены для проверки знаний на том уровне требований, который традиционен в вузах с профильным экзаменом по математике.

Итогом работы выпускника над каждой задачей типа С является представленные им на экзамене:

- ответ на поставленный в задании вопрос,
- текст решения задачи.

По большому счету, ответ к задаче также можно считать неотъемлемой частью ее *решения* (в широком смысле), что мы и подразумеваем в дальнейшем. Решение записывается в специальный бланк ответов № 2, выдаваемый выпускнику непосредственно на экзамене.

За решение задачи С3 на экзамене можно получить оценку в 0, 1, 2 или 3 балла. Не максимально возможное количество баллов за задачу ставится в том случае, если в ее решении присутствуют ошибки, неточности или недостатки обоснования. Подчеркнем, что на экзамене оценивание решения задачи должно производиться в строгом соответствии с заранее утверждёнными *критериями*.

Далеко не праздным является вопрос о том, *какие способы* решения задачи и записи ее ответа допустимы на едином государственном экзамене. Главным требованием к решению была и остается его *математическая правильность*, а именно:

- в ответ необходимо включить только верные значения искомой величины, причем все;
- форма записи ответа может быть любой из употребляемых в современной учебной литературе;
- текст решения должен служить реальным обоснованием (точнее, доказательством) правильности полученного ответа;

• при решении задачи любого содержания приемлемы любые математические методы — алгебраические, функциональные, графические, геометрические, логические, комбинаторные и т.д.;

• рациональность решения, равно как и его нерациональность, на экзамене во внимание не принимается.

По сравнению с предыдущими годами проведения ЕГЭ модель оценивания решений задач типа С в 2010 г. значительно изменена. Новая система оценки призвана продолжить лучшие традиции проверки работ, сложившиеся на школьных выпускных экзаменах, на вступительных экзаменах в вузы и даже, отчасти, на математических олимпиадах школьников.

Новые критерии оценки основываются на следующих принципах, которые при проверке работ на экзамене 2010 г. предполагается установить для экспертов обязательными.

• Проверяется только математическое содержание представленного решения; погрешности его оформления не являются поводом для снижения оценки.

• Ответ может быть записан в любом виде; оценивается не форма записи ответа, а его правильность.

• Степень подробности обоснований в решении должна быть разумно достаточной; претензии к решению, связанные с отсутствием ссылок на правомерно используемые стандартные факты и правила (как-то: формулы сокращённого умножения, формула корней квадратного уравнения, действия со степенями или логарифмами, свойства неравенств и многие-многие другие), не предъявляются.

• Решение задачи, в котором обоснованно получен правильный ответ, оценивается максимальным числом баллов.

• Наличие правильного ответа при полном отсутствии текста решения оценивается в ноль баллов.

• Некоторые погрешности решений, не оказавшие существенного влияния на его обоснованность и принципиальную правильность, могут расцениваться как описки и не приводить к снижению оценки.

• Если на каком-либо этапе решения допущена грубая ошибка, то другие его этапы, проведенные в работе правильно, могут быть, тем не менее, оценены положительно, в соответствии с критериями.

• При определении итоговой оценки решения выбирается максимально возможное число баллов, которое можно выставить за него в соответствии с утверждёнными критериями.

• При проверке оригинальных или нестандартных решений на экзамене вырабатываются частные критерии их оценки, соответствующие (аналогичные) общим.

Подготовка к предлагаемой форме экзамена по математике состоит *не в натаскивании* выпускника на какие-то определенные типы задач, а в систематическом и обстоятельном изучении самого предмета как на уроках в школе, так и в процессе самостоятельной работы ученика.

При подготовке к тренировочным и подготовительным заданиям нужно учесть следующие три аспекта.

• Во-первых, единый государственный экзамен в целом опирается, конечно же, на *школьную программу*. Поэтому уверенное знание программы по математике и хорошее владение ею — необходимое условие успешной сдачи ЕГЭ. Эта программа в основном определена и подкреплена огромным количеством самых разнообразных учебников. Однако среди обилия учебников по математике советуем выбирать те, что отличаются большей глубиной проникновения в излагаемый материал и рассчитаны на более вдумчивого учащегося. Эти качества учебников способны в перспективе оказать экзаменуемому существенную помощь.

• Во-вторых, чтобы подготовиться к какому-либо экзамену, вообще, нужно, для начала, изучить *историю вопроса*, а именно: узнать, какие задачи давались на экзамене в прошлые годы, какими методами предполагалось их решать, каковы были требования к их оформлению и т. п. Кроме того, следует сделать поправку на предполагаемые нововведения (которых в 2010 г. как раз будет больше обычного), для чего имеет смысл внимательно изучить демоверсию предстоящего экзамена, доступные пробные или тренировочные варианты, а также другие материалы, дающие более полное представление о будущих задачах.

• В-третьих, желательно иметь некоторый *запас прочности*, т. е. знать и уметь несколько больше того минимума, который вытекает из опыта предыдущих экзаменов. Ведь не секрет, что варианты экзаменационных заданий постепенно развиваются и усложняются: то, что раньше казалось новым и трудным для восприятия, со временем становится привычным и элементарным. В общем, нельзя ориентироваться только на вчерашний день. А учитывая, что ожидаемые в 2010 году задачи типа С будут в значительной мере опираться на опыт вступительных экзаменов, хорошо бы приобрести и проработать современные пособия для поступающих в вузы, содержащие грамотные подборки задач и возможных методов их решения.

Диагностическая работа

1. Решите неравенство $\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2-3x+3} \leqslant 0$.

2. Решите неравенство $\dfrac{2x^2-3x}{x^2+2x-3} \geqslant \dfrac{x}{4}$.

3. Решите неравенство $0{,}1^{x^2+4x} < 10\,000$.

4. Решите неравенство $\dfrac{x^4-16}{4\cdot 2^{8-x^2}-8^x} \leqslant 0$.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x-5) \geqslant 2$.

6. Решите неравенство

$$\log_{x+2}(7x^2-x^3)+\log_{(x+2)^{-1}}(x^2-3x) \geqslant \log_{\sqrt{x+2}}\sqrt{5-x}.$$

7. Решите уравнение $\sqrt{x-1}=3-x$.

8. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1} \leqslant 0$.

9. Решите уравнение $|x-1|+2|x-3|=5-x$.

10. Решите неравенство $2||x-2|-3|<x+4$.

11. Решите неравенство $x(|x^2-1|-2|x-1|)<0$.

12. Найдите все корни уравнения

$$\sin 2x-3=3\cos 2x$$

на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

13. Решите уравнение $\sqrt{6\sin x}+2\cos x=0$.

14. Решите неравенство $10^{x^{\lg x}}\cdot 10^{\sqrt{10}^{\lg^2 x}} < 1\,000\,000$.

15. Решите уравнение

$$3^{3-2x}-\log_2(2-3x)=3^{2-3x}-\log_2(3-2x).$$

16. Решите неравенство

$$5^{2x^2-2x+1} \leqslant \sqrt{3\sin\left(\pi x-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+4\cos\left(\pi x-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}.$$

§ 1. Рациональные уравнения и неравенства

Всякое *уравнение* или *неравенство* относительно *неизвестной* x записывается в виде

$$f(x) \vee g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые выражения[1], зависящие от переменной x, а $\vee$ — здесь и всюду ниже один из знаков $=$, $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, $\neq$.

К простейшим рациональным уравнениям и неравенствам можно отнести, во-первых, ***линейное***

$$ax + b \vee 0,$$

решаемое стандартными преобразованиями, и, во-вторых, ***квадратное***

$$ax^2 + bx + c \vee 0 \quad (a \neq 0),$$

левая часть которого представляет собой *квадратный трехчлен* $f(x)$.

Пара корней квадратного уравнения задаётся формулой

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Обычно в этой формуле корни обозначаются $x_{1,2}$, но тогда не ясно, какой из них соответствует знаку «плюс», а какой — знаку «минус». Этим числам разрешается и совпадать: в этом случае квадратное уравнение формально имеет только один корень[2].

Для решения же квадратного неравенства бывает полезно:

• разложить его левую часть на *линейные множители*, т. е. привести её к виду

$$f(x) = a(x - x_+)(x - x_-);$$

• применить следующее основное утверждение о знаке квадратного трехчлена: *пусть*

$$a > 0,$$

тогда неравенство

$$f(x) < 0$$

выполнено между корнями, а неравенство

$$f(x) > 0$$

выполнено за корнями.

---

[1] Функции.

[2] А квадратный трехчлен — по-прежнему два.

Здесь предполагается, что подкоренное выражение, фигурирующее в формуле корней квадратного трехчлена и называемое его *дискриминантом*, принимает неотрицательное значение. В противном случае — корней нет, разложение на линейные множители не возможно, а квадратный трехчлен во всех точках имеет один и тот же знак.

Пример 1.1. Решите неравенство

$$\frac{2x^2-3x-5}{x^2-3x+3} \leqslant 0.$$

Решение[1].

$$\frac{2x^2-3x-5}{x^2-3x+3} \leqslant 0,$$

$$(x-2{,}5)(x+1) \leqslant 0, \quad \text{так как } x^2-3x+3>0 \quad (D<0).$$

Ответ: $-1 \leqslant x \leqslant 2{,}5$.

Основным способом решения неравенства

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x) \vee 0,$$

левая часть которого представляет собой произведение, а правая — равна нулю, считается *перебор* всех таких случаев знаков сомножителей $f_i(x)$, при которых произведение имеет требуемый в неравенстве знак.

Метод интервалов применяется для решения ***рациональных*** неравенств, приведённых к *стандартному* виду

$$(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_n)^{k_n} \vee 0,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — целые числа[2]. Он позволяет организованно исследовать знак произведения, стоящего в левой части неравенства, опираясь на следующее рассуждение:

• точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ разбивают числовую ось на промежутки[3], на каждом из которых произведение имеет *фиксированный знак*;

• на самом *правом* из получившихся промежутков произведение заведомо *положительно*, так как на нём положителен каждый из его сомножителей;

---

[1] В тексте приводимых нами решений всюду между двумя последовательными уравнениями, неравенствами, системами или совокупностями подразумевается знак равносильности.

[2] Возможно, и отрицательные — тогда соответствующие множители с самого начала стоят в знаменателе.

[3] *Интервалы*, отсюда и название метода.

• далее, если двигаться по числовой оси справа налево, то при переходе через очередной корень x_i *меняет знак* множитель $x-x_i$ и только он, поэтому знак произведения либо меняется — когда соответствующая степень k_i нечётна, либо не меняется — когда она чётна;

• наконец, для завершения исследования достаточно выяснить, в каких точках x_i произведение *равно нулю*, а в каких — *не имеет смысла*, что определяется знаком степени k_i.

Пример 1.2. Решите неравенство

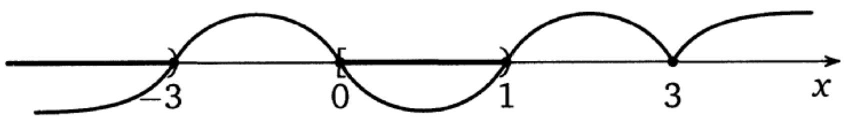
$$\frac{2x^2-3x}{x^2+2x-3} \geqslant \frac{x}{4}.$$

Решение.

$$\frac{2x^2-3x}{x^2+2x-3} \geqslant \frac{x}{4},$$

$$\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2+2x-3} \leqslant 0,$$

$$\frac{x(x-3)^2}{(x+3)(x-1)} \leqslant 0.$$



Ответ: $x<-3$, $0\leqslant x<1$, $x=3$.

При преобразованиях выражений и, в частности, при разложении их на множители иногда помогают *формулы сокращенного умножения*:

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ — *квадрат суммы*;

$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$ — *квадрат разности*;

$(x+y)(x-y) = x^2-y^2$ — *разность квадратов*;

$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ — *куб суммы*;

$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ — *куб разности*;

$(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$ — *сумма кубов*;

$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$ — *разность кубов*.

Тренировочные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $x^2 - 2010x + 2009 = 0.$

2. $x^2 + 2010x - 2011 = 0.$

3. $x^2 + 2011x + 2010 = 0.$

4. $x^2 - 2010x + 2009 < 0.$

5. $x^2 + 2010x - 2011 \leqslant 0.$

6. $x^2 + 2011x + 2010 \geqslant 0.$

7. $(x+1)^4 - 3(x+1)^2 - 4 = 0.$

8. $(x+1)^4 - 3(x+1)^2 - 4 < 0.$

9. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + x + \dfrac{1}{x} = 0.$

10. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + x + \dfrac{1}{x} \leqslant 0.$

11. $\dfrac{x^2+x+2}{3x^2+5x-14} = \dfrac{x^2+x+6}{3x^2+5x-10}.$

12. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680.$

13. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) < 1680.$

14. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right).$

15. $\dfrac{(2-x^2)(x-3)^2}{(x+1)(x^2-3x-4)} \geqslant 0.$

16. $\dfrac{(x+2)(x^2-2x+1)}{4+3x-x^2} \geqslant 0.$

17. $\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30} > 0.$

18. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-4x-5} < 0.$

19. $\dfrac{x^2-6x+9}{5-4x-x^2} \geqslant 0.$

20. $\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-4x+4} \geqslant 0.$

21. $\dfrac{x^2-3x+24}{x^2-3x+3} < 4.$

22. $\dfrac{x^2+2}{x^2-1} < -2.$

23. $\dfrac{3x-5}{x^2+4x-5} > \dfrac{1}{2}.$

24. $\dfrac{5-2x}{3x^2-2x-16}<1.$

25. $\dfrac{1}{x^2-5x+6}\geqslant\dfrac{1}{2}.$

26. $\dfrac{19-33x}{7x^2-11x+4}>2.$

27. $\dfrac{4}{1+x}+\dfrac{2}{1-x}<1.$

28. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x-1}>\dfrac{1}{x}.$

29. $\dfrac{7}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{9}{x-3}+1<0.$

30. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1.$

31. $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\geqslant 5.$

32. $(x^2-2x)(2x-2)-9\dfrac{2x-2}{x^2-2x}\leqslant 0.$

33. $\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{1}{x-2}\geqslant\dfrac{1}{x-3}.$

34. $\dfrac{7}{x^2-5x+6}+\dfrac{9}{x-3}+1\leqslant 0.$

35. $\dfrac{1}{x^2+8x-9}\geqslant\dfrac{1}{3x^2-5x+2}.$

36. $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-1}{1-\dfrac{1}{x-7}}\geqslant 0.$

37. $\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{8}-\dfrac{15}{88-32x}\right)^2\geqslant 1.$

Подготовительные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $3x^2-7x+4=0.$

2. $3x^2-7x+4\leqslant 0.$

3. $3x^2-7x+6=0.$

4. $3x^2-7x+6>0.$

5. $3x^2-7x-6=0.$

6. $3x^2-7x-6>0.$

7. $3x^4-7x^2+4=0.$

8. $3x^4-7x^2+4<0.$

9. $3x^4-7x^2-6=0.$

10. $3x^4-7x^2-6\leqslant 0.$

11. $3x^6-7x^3-6=0.$

12. $3x^6-7x^3-6>0.$

13. $(x-1)(3-x)(x-2)^2>0.$

14. $\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{-x-1}<0.$

15. $\dfrac{x^2+4x+4}{2x^2-x-1}>0.$

16. $\dfrac{5x-4}{3x+1}<0.$

17. $\dfrac{2x-3}{3x-5}>0.$

18. $\dfrac{0{,}7}{x-1-x^2}<0.$

19. $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2+x+1}\geqslant 0.$

20. $\dfrac{3}{x-2}<1.$

21. $\dfrac{1}{x-1}\leqslant 2.$

22. $\dfrac{x-1}{x+3}>2.$

23. $\dfrac{5x-1}{x^2+3}<1.$

24. $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}<1.$

25. $\dfrac{3x^2+1}{x^2-5x+6}\geqslant 0.$

26. $\dfrac{2x^2-21x+40}{x^2+3}\geqslant 0.$

27. $\dfrac{2x^2-3x-459}{x^2+1}>1.$

28. $\dfrac{x}{x^2-3x-4}>0.$

29. $\dfrac{x+7}{x-5}+\dfrac{3x+1}{2}\geqslant 0.$

30. $\dfrac{x-1}{x+1}<x.$

31. $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}.$

32. $2+\dfrac{3}{x+1}>\dfrac{2}{x}.$

33. $1+\dfrac{12}{x^2}<\dfrac{7}{x}.$

34. $x-17\geqslant\dfrac{60}{x}.$

35. $\dfrac{6}{x-5}\geqslant x.$

36. $x-1>\dfrac{4x}{3-x}.$

37. $\dfrac{3}{2-x^2}\leqslant 1.$

38. $\dfrac{1}{x+2}\geqslant\dfrac{1}{x-2}.$

39. $\dfrac{x^2+1}{x}<\dfrac{1}{x}+1.$

40. $\dfrac{9}{(x+1)^2}\geqslant 1.$

§ 2. Показательные уравнения и неравенства

Стандартный способ решения *простейших* ***показательных*** уравнений и неравенств основывается на монотонности показательной функции, из которой получается следующее основное ***правило отбрасывания оснований***[1]: *пусть*

$$a > 1,$$

тогда уравнение или неравенство

$$a^f \vee a^g$$

равносильно уравнению или неравенству

$$f \vee g.$$

В этом правиле последнее уравнение или неравенство имеет тот же знак $\vee$, что и первое, так как показательная функция с основанием $a > 1$ возрастает.

Если же основание a удовлетворяет неравенствам $0 < a < 1$, то в сформулированный переход необходимо внести поправку, поменяв в конце знак $\vee$ на *обратный* $\wedge$, а именно: знак $>$ — на $<$, знак $\geqslant$ — на $\leqslant$ и т. д., но знак $=$ (как и знак $\neq$) при этом не меняется вовсе. Всё дело в том, что показательная функция с основанием, меньшим единицы, уже не возрастает, а убывает.

Когда основание степени не является константой, может случиться, что при одних значениях неизвестной[2] оно больше единицы, а при других — меньше. И если это так, то каждый из перечисленных случаев разбирается отдельно[3].

В уравнении или неравенстве

$$a^f \vee b \quad (a, b > 0,\ a \neq 1),$$

левая часть которого уже имеет нужный вид, а правая — нет, положение можно поправить с помощью тождества[4]

$$b = a^{\log_a b}.$$

Оно же позволяет в случае переменного основания перейти к новому, заранее выбранному, постоянному основанию.

---

[1] То есть логарифмирование уравнения или неравенства.

[2] Или параметра.

[3] А при необходимости разбираются также и случаи, когда основание равно нулю или даже отрицательно.

[4] Представляющего собой, по существу, определение *логарифма*.

Пример 2.1. Решите неравенство

$$0{,}1^{x^2+4x} < 10\,000.$$

Р е ш е н и е.

$$0{,}1^{x^2+4x} < 10\,000 \quad (= 0{,}1^{-4});$$

$$x^2+4x > -4;$$

$$(x+2)^2 > 0;$$

$$x \neq -2.$$

Ответ: $x < -2$, $x > -2$.

Для приведения исходного показательного уравнения или неравенства к нужному виду могут пригодиться следующие *формулы действий со степенями* (здесь и ниже считаем $a, b > 0$):

$$\boxed{\begin{aligned}
&a^0 = 1, \quad 1^x = 1;\\
&a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \quad (k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N});\\
&a^{-x} = \frac{1}{a^x};\\
&a^x \cdot a^y = a^{x+y};\\
&\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};\\
&(a^x)^y = a^{xy};\\
&a^x \cdot b^x = (ab)^x;\\
&\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.
\end{aligned}}$$

К неравенствам вида

$$(a^f - a^g) \cdot h \vee 0$$

применим ***метод замены множителя***, позволяющий сильно упростить выражение в скобках и состоящий в следующем: *пусть*

$$a > 1,$$

тогда множитель

$$a^f - a^g$$

можно заменить множителем

$$f - g$$

того же знака.

При указанной замене сохраняется каждое из трех возможных событий: положительность множителя, его отрицательность и равенство его нулю. По сути, этот метод представляет собой перефразировку сформулированного выше правила отбрасывания оснований, а в случае $0<a<1$ тот же множитель a^f-a^g можно заменить противоположным множителем $g-f$.

Пример 2.2. Решите неравенство

$$\frac{x^4-16}{4\cdot 2^{8-x^2}-8^x}\leqslant 0.$$

Решение.

$$\frac{x^4-16}{4\cdot 2^{8-x^2}-8^x}\leqslant 0,$$

$$\frac{(x^2+4)(x^2-4)}{2^{10-x^2}-2^{3x}}\leqslant 0,$$

$$\frac{x^2-4}{(10-x^2)-3x}\leqslant 0 \quad \text{(так как } 2^f-2^g \text{ и } f-g \text{ — одного знака)},$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+5)}\geqslant 0,$$

$$\begin{cases}\dfrac{x+2}{x+5}\geqslant 0,\\ x\neq 2.\end{cases}$$

Ответ: $x<-5$, $-2\leqslant x<2$, $x>2$.

Заметим, что полученное выше неравенство

$$\frac{(x^2+4)(x^2-4)}{2^{10-x^2}-2^{3x}}\leqslant 0$$

можно было решить и без замены множителя, рассмотрев два случая:

$$1)\ \begin{cases}x^2\geqslant 4,\\ 2^{10-x^2}<2^{3x};\end{cases}\quad \begin{cases}(x-2)(x+2)\geqslant 0,\\ (x-2)(x+5)>0;\end{cases}\quad \left[\begin{aligned}&x>2\\ &x<-5;\end{aligned}\right.$$

$$2)\ \begin{cases}x^2\leqslant 4,\\ 2^{10-x^2}>2^{3x};\end{cases}\quad \begin{cases}(x-2)(x+2)\leqslant 0,\\ (x-2)(x+5)<0;\end{cases}\quad -2\leqslant x<2.$$

Тренировочные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $\dfrac{2^{2x-1}\cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}}=\left(\dfrac{1}{64}\right)^{-1}$.

2. $25(0{,}2)^{x+0{,}5}=\sqrt{5}(0{,}04)^{x}$.

3. $4^{\frac{2}{x}}-5\cdot 4^{\frac{1}{x}}+4=0$.

4. $64\cdot 9^{x}-84\cdot 12^{x}+27\cdot 16^{x}=0$.

5. $4^{-\frac{-1}{x}}+6^{-\frac{-1}{x}}=9^{-\frac{-1}{x}}$.

6. $3^{2x-3}-9^{x-1}+27^{\frac{2x}{3}}=675$.

7. $5^{2x}-7^{x}-35\cdot 5^{2x}+35\cdot 7^{x}=0$.

8. $8^{x}-3\cdot 4^{x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$.

9. $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

10. $(2+\sqrt{3})^{x}+(2-\sqrt{3})^{x}=4$.

11. $(\sqrt{5+\sqrt{24}})^{x}+(\sqrt{5-\sqrt{24}})^{x}=10$.

12. $3^{12x-1}-9^{6x-1}-27^{4x-1}+81^{3x+1}=2192$.

13. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\sqrt{x}}=2{,}25^{\sqrt{x}-4}$.

14. $2^{x^2-6}\cdot 3^{x^2-6}=\dfrac{(6^{x-1})^{4}}{6^{5}}$.

15. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1}=\dfrac{\lg 4}{\lg 8}$.

16. $5^{x}\cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=500$.

17. $0{,}3^{2x^2-3x+6}<0{,}00243$.

18. $0{,}1^{4x^2-2x-2}<0{,}1^{2x-3}$.

19. $4^{-x+0{,}5}-7\cdot 2^{-x}-4<0$.

20. $4^{x+1}-16^{x}<2\cdot\log_4 8$.

21. $\dfrac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1}<2$.

22. $\dfrac{2^{1-x}-2^{x}+1}{2^{x}-1}\leqslant 0$.

23. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x}-5^{x+2}$.

24. $4^{x}-2\cdot 5^{2x}-10^{x}>0$.

25. $9\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{-\frac{1}{x}}<4\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$.

26. $8\cdot\dfrac{3^{x-2}}{3^{x}-2^{x}}<1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}$.

27. $\dfrac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^{x}-11\cdot 3^{x-1}-5}\geqslant 5.$

28. $2^{3x-0,5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}>1+2^{-3x}.$

29. $4^{3x^2+x}-8<2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$

30. $5^{2x-\frac{x^2}{3}}<5^{2-2x}(\sqrt[3]{5})^{x^2}+24.$

31. $5^{x+2}-5^{x+1}-5^{x}>7^{\frac{x}{2}+3}+7^{\frac{x}{2}+2}+7^{\frac{x}{2}+1}.$

32. $5^{2x+1}+6^{x+1}>30+5^{x}\cdot 30^{x}.$

Подготовительные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $5^{x^2-6x+8}=1.$

2. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{3x-7}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{7x-3}.$

3. $0{,}125\cdot 2^{4x-16}=\left(\dfrac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}.$

4. $5^{x+1}=5^{x-1}+24.$

5. $7^{x+1}+7^{x}=3^{x+2}+3^{x+1}+3^{x}.$

6. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250.$

7. $9^{x}+6^{x}=2\cdot 4^{x}.$

8. $2^{2+x}+2^{2-x}=17.$

9. $2^{x+1}\cdot 5^{x}=200.$

10. $2^{x}\cdot 5^{x-1}=10^{x}\cdot 5^{x+1}.$

11. $2^{3-2x}=4^{3x+1-x^2}.$

12. $3^{2x}-5^{x}-9^{x}\cdot 15+5^{x}\cdot 15=0.$

13. $7^{x+2}-\dfrac{1}{7}7^{x+1}-14\cdot 7^{x-1}+2\cdot 7^{x}=48.$

14. $4\cdot 2^{2x}-6^{x}=18\cdot 3^{2x}.$

15. $4^{x}=2\cdot 14^{x}+3\cdot 49^{x}.$

16. $2^{5-10x}>1.$

17. $16^{x}>0{,}125.$

18. $0{,}5^{x}>\dfrac{1}{128}.$

19. $3^{x+1}<\dfrac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}.$

20. $0{,}2^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$.

21. $0{,}1^{\frac{2x+1}{1-x}} > 10^3$.

22. $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leqslant 9$.

23. $2^x + 2^{1-x} - 3 < 0$.

24. $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

25. $25^{-x} - 5^{-x+1} \geqslant 50$.

26. $3^{x-3} < \dfrac{3}{27^{\frac{1}{x}}}$.

27. $4^{\frac{2x-2}{x}} < \sqrt[3]{8^{3x-9}}$.

§ 3. Логарифмические уравнения и неравенства

Стандартный метод решения *простейших* ***логарифмических*** уравнений и неравенств, изучаемых в школе, опирается на монотонность логарифмической функции, т. е. на следующее основное ***правило отбрасывания логарифмов***[1]: *пусть $a > 1$, тогда уравнение или неравенство*

$$\log_a f \vee \log_a g$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f \vee g \\ f, g > 0. \end{cases}$$

Отличие этого правила от аналогичного правила отбрасывания оснований объясняется тем, что при отбрасывании логарифмов расширяется *область допустимых значений*[2] (*ОДЗ*) уравнения или неравенства. Действительно, выражения f и g, стоявшие прежде под логарифмами, после отбрасывания последних могут стать отрицательными или равными нулю, каковые возможности следует сознательно отмести.

Для этого в систему с полученным уравнением или неравенством можно добавить оба пропавших ограничения на f и g. При этом, как правило, одно из них[3] оказывается логически лишним, что позволяет значительно упростить получающуюся систему, сэкономив на нахождении ОДЗ.

В случае $0 < a < 1$, неравенстве $f \vee g$ итоговой системы необходимо заменить неравенством $f \wedge g$, так как логарифмическая функция с таким основанием a убывает.

Если же основание логарифма не есть константа, то отдельно разбираются случаи, когда оно больше единицы и когда — меньше[4].

Для того чтобы отбросить логарифмы в уравнении или неравенстве

$$\log_a f \vee g,$$

---

[1] То есть потенцирование уравнения или неравенства.

[2] Или область определения.

[3] А иногда и оба.

[4] Случаи, когда основание равно единице, нулю или вообще отрицательно, — невозможны *по определению* логарифма.

его правую часть можно представить в нужном виде с помощью тождества[1]

$$g = \log_a(a^g).$$

Пример 3.1. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 5) \geqslant 2.$$

Решение.

$$\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 5) \geqslant 2 \ \ (= \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}^2 = \log_{\sqrt{3}} 3),$$
$$x^2 - 2x - 5 \geqslant 3,$$
$$(x-4)(x+2) \geqslant 0.$$

Ответ: $x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$.

Для приведения исходного логарифмического уравнения или неравенства к нужному виду могут пригодиться следующие *формулы действий с логарифмами* (здесь и ниже $a, b, x, y > 0$ и $a, b \neq 1$):

$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1;$

$a^{\log_a x} = x$ — *основное логарифмическое тождество*;

$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ — *логарифм произведения*;

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ — *логарифм частного*;

$p \log_a x = \log_a(x^p)$ — *логарифм степени*;

$\frac{p}{q} \log_a x = \log_{(a^q)}(x^p) \quad (q \neq 0);$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ — *формула перехода к новому основанию*;

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$

В случае переменного основания логарифма можно избавиться от явного перебора случаев, перейдя[2] к новому, постоянному основанию.

Некоторые формулы из приведённого списка обладают тем свойством, что при их использовании слева направо ОДЗ уравнения или неравенства *расширяется*[3], а в другую сторону — *сужается*. И если

[1] Представляющего собой, по большому счёту, ещё одну разновидность определения логарифма.

[2] По соответствующей формуле.

[3] Так же как и при отбрасывании логарифмов.

первую ситуацию легко исправить добавлением пропавших ограничений в систему или проверкой их выполнения для найденных решений, то вторая ситуация совершенно недопустима, так как может привести к потере решений.

К неравенствам вида

$$(\log_a f - \log_a g) \cdot h \vee 0$$

также применим ***метод замены множителя***: *пусть*

$$a > 1,$$

тогда множитель

$$\log_a f - \log_a g$$

можно заменить множителем

$$f - g$$

того же знака при дополнительных условиях

$$f, g > 0.$$

Важный частный случай этой замены получается при подстановке в ней $g = 1$: *пусть*

$$a > 1,$$

тогда множитель

$$\log_a f$$

можно заменить множителем

$$f - 1 \quad \text{при } f > 0.$$

Опять же, в случае $0 < a < 1$ множитель $\log_a f - \log_a g$ можно заменить противоположным множителем $g - f$ при $f, g > 0$, а множитель $\log_a f$ — противоположным множителем $1 - f$ при $f > 0$.

Пример 3.2. Решите неравенство

$$\log_{x+2}(7x^2 - x^3) + \log_{(x+2)^{-1}}(x^2 - 3x) \geqslant \log_{\sqrt{x+2}} \sqrt{5 - x}.$$

Решение.

$$\log_{x+2}(7x^2 - x^3) + \log_{(x+2)^{-1}}(x^2 - 3x) \geqslant \log_{\sqrt{x+2}} \sqrt{5 - x};$$

$$\log_{x+2}(7x^2 - x^3) - \log_{x+2}(x^2 - 3x) \geqslant \log_{x+2}(5 - x);$$

$$\frac{\lg(7x^2 - x^3)}{\lg(x+2)} - \frac{\lg(x^2 - 3x) + \lg(5 - x)}{\lg(x+2)} \geqslant 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{\lg(7x^2-x^3)-\lg(x^2-3x)(5-x)}{\lg(x+2)-\lg 1} \geqslant 0, \\ 5-x>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(7x^2-x^3)-(x^2-3x)(5-x)}{(x+2)-1} \geqslant 0, \\ x<5, \\ 7x^2-x^3>0, \\ x^2-3x>0, \\ x+2>0 \end{cases}$$

(так как $\lg f - \lg g$ и $f-g$ — одного знака при $f, g > 0$);

$$\begin{cases} \dfrac{x(x-15)}{x+1} \leqslant 0, \\ x<5, \\ x^2(x-7)<0, \\ x(x-3)>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<5, \\ \dfrac{x}{x+1} \geqslant 0, \\ x(x-3)>0. \end{cases}$$

Ответ: $-2<x<-1$, $3<x<5$.

Данное неравенство можно было решить, не делая замены множителя, следующим образом:

$$\begin{cases} \log_{x+2}(7x^2-x^3) \geqslant \log_{x+2}(x^2-3x)(5-x), \\ 5-x \geqslant 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} x+2>1, \\ 7x^2-x^3 \geqslant (x^2-3x)(5-x), \\ x^2-3x>0, \\ 5-x>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x-15) \leqslant 0, \\ -1<x<5, \\ x(x-3)>0; \end{cases} \qquad 3<x<5;$$

$$2) \begin{cases} 0<x+2<1, \\ 7x^2-x^3 \leqslant (x^2-3x)(5-x), \\ 7x^2-x^3>0, \\ 5-x>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x-15) \geqslant 0, \\ -2<x<-1, \\ x^2(x-7)>0; \end{cases} \qquad -2<x<-1.$$

Тренировочные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $\log_{(x-1)} 2 = 3$.

2. $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3 x))) = \frac{1}{2}$.

3. $(\log_2 x)^{-1} + 4\log_2 x^2 + 9 = 0$.

4. $\log_{\sqrt{x}} 2 + 4\log_4 x^2 + 9 = 0$.

5. $\dfrac{\log_8 \frac{8}{x^2}}{(\log_8 x)^2} = 3$.

6. $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2 = 4$.

7. $3^{\log_3(\lg\sqrt{x})} - \lg x + \lg x^2 - 3 = 0$.

8. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9$.

9. $\log_{\frac{1}{3}} x - 3\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} + 2 = 0$.

10. $3 + 2\log_{x+1} 3 = 2\log_3(x+1)$.

11. $\log_x(9x^2)\cdot(\log_3 x)^2 = 4$.

12. $2\log_8(2x) + \log_8(x^2+1-2x) = \frac{4}{3}$.

13. $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$.

14. $2\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}}(13-x) = \log_2(10-x)^2 + 2\log_4(8-x)$.

15. $2\log_2(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2\sqrt{2}x) = 1$.

16. $\log_3((x+1)(x-3)) = 4\log_9(2x+1) - \log_{\sqrt{5}} 5$.

17. $\log_{0,5}(x^2-5x+6) > -1$.

18. $\log_8(x^2-4x+3) \leqslant 1$.

19. $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2-3x}{x} \geqslant -1$.

20. $\dfrac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$.

21. $2\log_2(x-1) - \log_2(2x-4) > 1$.

22. $\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0$.

23. $2\log_3 x - \log_{\frac{1}{3}}(4-x) \leqslant \log_3(x-1)^2 + 2\log_9(10-x)$.

24. $\log_x\left(\dfrac{4x+5}{6-5x}\right) < -1$.

25. $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right) > 1.$

26. $\log_{x^2}(x+2) < 1.$

27. $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}.$

28. $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\cdot\log_2(x+1) > \log_{(x+2)}(x+1).$

29. $\log_5 x + \log_x \frac{x}{3} < \frac{2-\log_3 x}{\log_3 x}\log_5 x.$

30. $\log_{\frac{1}{2}}(\log_8 \frac{x^2-2x}{x-3}) < 0.$

31. $(\log_x 2)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x) > 1.$

Подготовительные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1.$

2. $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 + \lg(21x-20) - \lg(2x-1).$

3. $\lg x - \frac{1}{2}\lg\left(x-\frac{1}{2}\right) = \lg\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\lg\left(x+\frac{1}{8}\right).$

4. $9^{\log_3(1-2x)} = 5x^2 - 5.$

5. $x^{1+\lg x} = 10x.$

6. $(\lg x)^2 - 3\lg x = \lg x^2 - 4.$

7. $(\log_2 x)^2 + 2\log_2\sqrt{x} = 2.$

8. $\log_5\left(\frac{x+2}{10}\right) = \log_5\left(\frac{2}{x+1}\right).$

9. $2\log_4(4-x) = 4 - \log_2(-x-2).$

10. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1.$

11. $\log_{x+1}(x^2-3x+1) = 1.$

12. $\log_2 x - 8\log_{x^2} 2 = 3.$

13. $1 + 2\log_{(x+2)} 5 = \log_5(x+2).$

14. $\log_4 2^{4x} = 2^{\log_{\sqrt{2}} 2}.$

15. $\log_2\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{15}{\log_2\left(\frac{x}{8}\right) - 1}.$

16. $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) > 0.$

17. $\log_5(3x-1) < 1.$

18. $\lg(x^2-5x+7)<0.$

19. $\log_7\left(\dfrac{1-2x}{x}\right)\leqslant 0.$

20. $\log^2_{0,5}x+\log_{0,5}x\leqslant 2.$

21. $\log_2 x\leqslant \dfrac{2}{\log_2 x-1}.$

22. $\dfrac{1}{1+\lg x}+\dfrac{1}{1-\lg x}>2.$

23. $\log_{\frac{1}{3}}(3x-4)>\log_{\frac{1}{3}}(x-2).$

24. $\log_{0,5}(4-x)\geqslant\log_{0,5}2-\log_{0,5}(x-1).$

25. $\log_{0,1}(x^2+x-2)>\log_{0,1}(x+3).$

26. $1+\log_2(x-2)>\log_2(x^2-3x+2).$

27. $\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_4(x^2-5)\right]>0.$

28. $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-6x+18)+2\log_5(x-4)<0.$

29. $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_x 3-\dfrac{5}{2}.$

30. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1.$

§ 4. Иррациональные уравнения и неравенства

Для избавления от радикалов в ***иррациональных*** уравнениях или неравенствах требуется, прежде всего, умение возводить обе их части в квадрат. Делается это с помощью следующего основного ***правила возведения в квадрат***, базирующегося на возрастании простейшей квадратичной функции на положительной полуоси: *пусть*

$$f, g \geqslant 0,$$

тогда уравнение или неравенство

$$f \vee g$$

равносильно уравнению или неравенству

$$f^2 \vee g^2.$$

Это правило не распространяется на те случаи, в которых хотя бы одна из частей уравнения или неравенства отрицательна, — их нужно рассматривать отдельно[1].

Неосторожное возведение в квадрат уравнения может повлечь за собой, к счастью, только приобретение посторонних корней, которые выявляются впоследствии с помощью проверки. Что же касается возведения в квадрат неравенств, то тут ситуация гораздо серьёзнее: несоблюдение основного правила может привести как к приобретению, так и к потере решений — а это уже непоправимо.

Пример 4.1. Решите уравнение

$$\sqrt{x-1} = 3 - x.$$

Р е ш е н и е.

$$\sqrt{x-1} = 3 - x;$$

$$\begin{cases} 3 - x \geqslant 0, \\ x - 1 = (3-x)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x^2 - 7x + 10 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant 3, \\ (x-2)(x-5) = 0; \end{cases}$$

$$x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

[1] Некоторые (очевидно не реализуемые в данных условиях) — только в уме.

Преобразования иррациональных уравнений или неравенств производятся по следующим *формулам действий с арифметическими корнями* (здесь $x, y \geqslant 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}$):

$$\sqrt[n]{1} = 1, \quad \sqrt[n]{0} = 0;$$

$$(\sqrt[n]{x})^n = x;$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \text{ — \textit{корень из произведения};}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad (y \neq 0) \text{ — \textit{корень из дроби};}$$

$$\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k \text{ — \textit{корень из степени};}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x} \text{ — \textit{корень из корня};}$$

$$\sqrt[nm]{x^{km}} = \sqrt[n]{x^k} \text{ — \textit{правило сокращения}.}$$

Корни чётной степени извлекаются только из неотрицательных чисел[1]. Поэтому, действуя по приведённым формулам, например, с квадратными корнями, нужно аккуратно отслеживать возможное расширение ОДЗ уравнения или неравенства и, главное, не допускать её сужения.

Сказанное непосредственно относится к возведению квадратного корня $\sqrt{f}$ в квадрат, после чего подкоренное выражение f стоит уже не под корнем, а значит, лишено неявного ограничения $f \geqslant 0$. Правда, довольно часто это ограничение сохраняется в силу других причин (например, в силу равенства бывшего подкоренного выражения f квадрату какого-либо другого выражения).

К неравенствам вида

$$(\sqrt{f} - \sqrt{g}) \cdot h \vee 0$$

также применим ***метод замены множителя***, вытекающий из основного правила возведения в квадрат и состоящий в следующем: *множитель*

$$\sqrt{f} - \sqrt{g}$$

можно заменить множителем

$$f - g$$

того же знака при дополнительных условиях

$$f, g \geqslant 0.$$

[1] А корни нечётной степени доопределяются на любые действительные числа

Важный частный случай этой замены получается в результате подстановки в ней $g=0$: *множитель* $\sqrt{f}$ *можно заменить множителем*

$$f \quad \text{при } f \geqslant 0.$$

Пример 4.2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1} \leqslant 0.$$

Решение.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1} \leqslant 0;$$

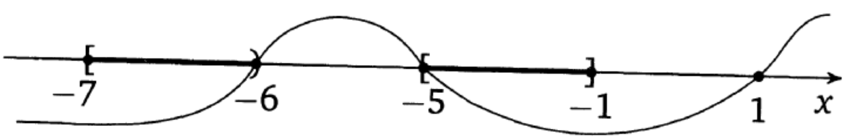
$$\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4(1-x)}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{1}} \leqslant 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2-1)-4(1-x)}{(x+7)-1} \leqslant 0, \\ x^2-1 \geqslant 0, \\ 1-x \geqslant 0, \\ x+7 \geqslant 0; \end{cases}$$

(так как $\sqrt{f}-\sqrt{g}$ и $f-g$ — одного знака при $f, g \geqslant 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+4x-5}{x+6} \leqslant 0, \\ x^2 \geqslant 1, \\ -7 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x+5)(x-1)}{x+6} \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} -7 \leqslant x \leqslant -1 \\ x=1. \end{array}\right. \end{cases}$$



Ответ: $-7 \leqslant x < -6$, $-5 \leqslant x \leqslant -1$, $x=1$.

Исходное неравенство можно решить методом интервалов, применив его к иррациональной функции

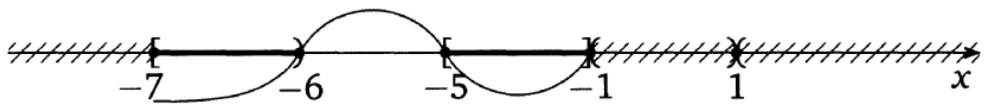
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - 2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1}.$$

1. ООФ: $\begin{cases} x^2-1 \geqslant 0, \\ 1-x \geqslant 0, \\ 1 \neq x+7 \geqslant 0; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ -6<x\leqslant -1, \\ -7\leqslant x<-6. \end{array}\right.$

2. $\sqrt{x^2-1} = 2\sqrt{1-x}$; $x^2-1 = 4(1-x) \geqslant 0$; $\begin{cases} (x-1)(x+5)=0, \\ x\leqslant 1; \end{cases}$

$x=1, -5.$

3. Определим знаки:



Тренировочные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $\sqrt{2x^2-21x+4}=2-11x.$

2. $\sqrt{3x^2-25x+51}=7-2x.$

3. $\sqrt{x^4-2x-5}=1-x.$

4. $\sqrt{4-x}-\sqrt{5+x}=3.$

5. $\sqrt{14-x}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x-1}.$

6. $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}.$

7. $\sqrt{x}+\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{(x+1)^3}=0.$

8. $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8.$

9. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+34}-\sqrt{x+7}.$

10. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

11. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1.$

12. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$

13. $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$

14. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$

15. $(5x+2)\sqrt{1-x}+(5x-7)\sqrt{x}=0.$

16. $\sqrt{1-x}\leqslant\sqrt[4]{x+5}.$

17. $\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19}>\sqrt{5x-27}.$

18. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1.$

19. $\sqrt{(x+5)(3x+4)}>4(x-1).$

20. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}<\dfrac{3}{2}.$

21. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\geqslant 2.$

22. $\sqrt{2-\sqrt{x+3}}<\sqrt{x+4}.$

23. $x-4<\dfrac{x^2}{(1+\sqrt{x+1})^2}.$

24. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}>2.$

25. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{35}{12}$.

26. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$.

27. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$.

28. $x^2\geqslant x(2+\sqrt{12-2x-x^2})$.

29. $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}>\dfrac{2}{x}$.

30. $\sqrt{x+5}-\sqrt{-x-3}<1+\sqrt{(x+5)(-x-3)}$.

31. $11\sqrt{2x-\sqrt{48x-144}}>2x-12$.

Подготовительные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+3}=0$.
2. $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$.
3. $\sqrt{8-3x^2}=1$.
4. $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x-2}$.
5. $x-\sqrt{x+1}=1$.
6. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$.
7. $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$.
8. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$.
9. $\sqrt{7-x}=x-1$.
10. $\sqrt{12+x}+x=0$.
11. $\sqrt{6-4x+x^2}=x+4$.
12. $\dfrac{\sqrt{2x+1}+1}{x}=1$.
13. $2x^2+3x-\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$.
14. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$.
15. $\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}-\sqrt{x+1}$.
16. $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}}>-1$.

17. $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x}$.

18. $\sqrt{x^2+2x-3} < 1$.

19. $\frac{3}{\sqrt{2-x}} < \sqrt{2-x}+2$.

20. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0$.

21. $\sqrt{x^2} < x+1$.

22. $\sqrt{2x-1} < x-2$.

23. $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$.

24. $3-x > 3\sqrt{1-x^2}$.

25. $x < \sqrt{x+2}$.

26. $x < \sqrt{2-x}$.

27. $x+3 < \sqrt{x+33}$.

28. $\sqrt{(x+3)(x-8)} > x+2$.

29. $3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$.

30. $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$.

§ 5. Уравнения и неравенства с модулем

Стандартное ***правило раскрытия модуля*** основывается на его *определении*:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Раскрывая сразу несколько модулей, приходится разбирать случаи, которые задаются знаками выражений, стоящих под модулем. Однако, если количество модулей велико, то велико и число разбираемых случаев.

Его можно заметно сократить за счёт применения *метода интервалов*: так, все корни выражений $f_i(x)$, от каждого из которых в уравнении или неравенстве взят модуль, разбивают числовую прямую на промежутки[1] — и на любом из них каждый модуль $|f_i(x)|$ раскрывается уже вполне однозначно.

Пример 5.1. Решите уравнение

$$|x-1|+2|x-3| = 5-x.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим случаи:

$$1)\ \begin{cases} x \geqslant 3, \\ (x-1)+2(x-3) = 5-x, \end{cases} \qquad x = 3;$$

$$2)\ \begin{cases} 1 \leqslant x < 3, \\ (x-1)+2(3-x) = 5-x, \end{cases} \qquad 1 \leqslant x < 3;$$

$$3)\ \begin{cases} x < 1, \\ (1-x)+2(3-x) = 5-x, \end{cases} \qquad x \in \varnothing.$$

Ответ: $1 \leqslant x \leqslant 3$.

Другой подход, напоминающий скорее не раскрытие, а *отбрасывание* модулей, применим к *простейшим* уравнениям и неравенствам вида

$$|f| = |g| \quad \text{или} \quad |f| \vee g.$$

Он использует *геометрический смысл* модуля, состоящий в том, что модуль $|x|$ численно равен расстоянию на числовой прямой от точки x до точки 0.

[1] Число которых сравнимо с числом модулей.

Исходя из этого смысла, можно установить справедливость, например, таких утверждений:

• *уравнение* $|f| = |g|$ *равносильно совокупности*

$$f = \pm g;$$

• *уравнение* $|f| = g$ *равносильно системе*

$$\begin{cases} f = \pm g, \\ g \geqslant 0; \end{cases}$$

• *неравенство* $|f| < g$ *равносильно двойному неравенству*

$$-g < f < g;$$

• *неравенство* $|f| > g$ *равносильно совокупности*

$$\left[\begin{array}{l} f > g \\ f < -g. \end{array}\right.$$

Пример 5.2. Решите неравенство

$$2||x-2|-3| < x+4.$$

Р е ш е н и е.

$$2||x-2|-3| < x+4;$$
$$-x-4 < 2(|x-2|-3) < x+4;$$
$$-x+2 < 2|x-2| < x+10;$$
$$\begin{cases} -x-10 < 2(x-2) < x+10; \\ \left[\begin{array}{l} 2(x-2) > -x+2, \\ 2(x-2) < x-2; \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\begin{cases} -2 < x < 14; \\ \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $-2 < x < 2$, $2 < x < 14$.

Задачу можно решить раскрытием модулей, рассмотрев два случая, в каждом из которых — еще по два случая.

1) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ 2|x-5| < x+4; \end{cases}$

1а) $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ 2x-10 < x+4; \end{cases}$ $\quad 5 \leqslant x \leqslant 14;$

1б) $\begin{cases} 2 \leqslant x < 5, \\ -2x+10 < x+4; \end{cases}$ $\quad 2 < x < 5;$

2) $\begin{cases} x < 2, \\ 2|x+1| < x+4; \end{cases}$

2а) $\begin{cases} -1 \leqslant x < 2, \\ 2x+2 < x+4; \end{cases}$ $\quad -1 \leqslant x < 2;$

2б) $\begin{cases} x < -1, \\ -2x-2 < x+4; \end{cases}$ $\quad -2 < x < -1.$

Объединив все четыре промежутка, получим ответ.

Полезную роль при преобразовании выражений могут сыграть следующие *свойства модулей*:

$|x|^2 = x^2;$

$|x| = \sqrt{x^2};$

$|xy| = |x| \cdot |y|$ — *модуль произведения*;

$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$ — *модуль дроби*;

$|x| \geqslant x;$

$|x+y| \leqslant |x| + |y|$ — *неравенство треугольника*[1];

$|x-y| \geqslant \big||x| - |y|\big|.$

Наконец, первое из перечисленных здесь свойств порождает ещё один способ избавления от модулей — а именно, *возведение их в квадрат*.

Согласно указанному свойству и основному правилу возведения в квадрат уравнения или неравенства, к примеру, имеем: *неравенство*

$$|f| \vee |g|$$

[1] Или *модуль суммы*: здесь неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда слагаемые имеют одинаковый знак.

равносильно неравенству

$$f^2 \vee g^2$$

(при дальнейшей работе с полученным неравенством выполнять реальное возведение в квадрат вовсе не обязательно: наоборот, лучше применить формулу разности квадратов).

Из сказанного вытекает, что к неравенствам вида

$$(|f|-|g|)\cdot h \vee 0$$

также применим ***метод замены множителя***: *множитель*

$$|f|-|g|$$

можно заменить множителем

$$f^2-g^2$$

того же знака.

Пример 5.3. Решите неравенство

$$x(|x^2-1|-2|x-1|)<0.$$

Р е ш е н и е.

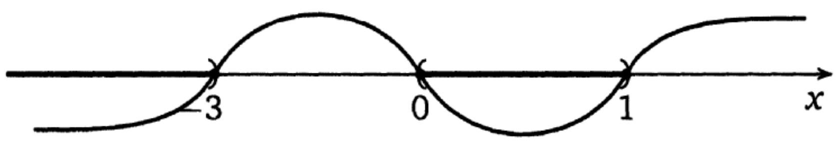
$x(|x^2-1|-2|x-1|)<0$;

$x((x^2-1)^2-(2x-2)^2)<0$ (так как $|f|-|g|$ и f^2-g^2 — одного знака);

$x((x^2-1)+(2x-2))((x^2-1)-(2x-2))<0$;

$x(x^2+2x-3)(x^2-2x+1)<0$;

$x(x+3)(x-1)^3<0$;



Ответ: $x<-3$, $0<x<1$.

Тренировочные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $|2-5x^2|=3.$

2. $|x^2-13x+35|=|35-x^2|.$

3. $|2x+8|-|x-5|=12.$

4. $|5x-3|-|7x-4|=2x-1.$

5. $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0.$

6. $2|x+6|-|x|+|x-6|=18.$

7. $||||x-1|+2|-1|+1|=2.$

8. $|2x-15|=22-|2x+7|.$

9. $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=1.$

10. $|x^2-2x-1|=\dfrac{5x+1}{3}.$

11. $|x-1|>\dfrac{x+1}{2}.$

12. $|2x-4|-|3x+9|>|x-1|-6.$

13. $||x+1|-|x-1||<1.$

14. $|x^2-2x-3|<3x-3.$

15. $x^2-|5x-3|-x<2.$

16. $x^2+4\geqslant|3x+2|-7x.$

17. $(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0.$

18. $|x^2+x-2|+|x+4|\leqslant x^2+2x+6.$

19. $|x^2-2x-8|>2x.$

20. $x^2+x-10<2|x-2|.$

21. $2x>\dfrac{5x+3}{|x+2|}.$

22. $\dfrac{|x+1|+|x-2|}{x+199}<1.$

23. $\dfrac{|x-2|}{|x-1|-1}\geqslant 1.$

24. $\dfrac{3}{|x+3|-1}\geqslant|x+2|.$

25. $\left|\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|<3.$

26. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0.$

27. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geqslant 2.$

28. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x.$

29. $|x^3-1| \geqslant 1-x.$

30. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leqslant 1.$

Подготовительные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $|x-1| = x-1.$

2. $|x+2| = 2(3-x).$

3. $|3x-2|+x = 11.$

4. $|x|-|x-2| = 2.$

5. $|1-x^2| = 8.$

6. $|2x-3| = 3-2x.$

7. $x^2+|x|-2 = 0.$

8. $(x-7)^2-|x-7| = 30.$

9. $x^2-6x+8+|x-4| = 0.$

10. $3|x+2|+x^2+6x+2 = 0.$

11. $|5-2x| < 1.$

12. $\left|3x-\dfrac{5}{2}\right| \geqslant 2.$

13. $|x-2| \leqslant |x+4|.$

14. $2|x+1| \leqslant x+4.$

15. $|x+2|-|x-1|+\dfrac{3}{2} < x.$

16. $|x+1|-|x-4| > 7.$

17. $x^2-5|x|+6 < 0.$

18. $x^2-|x|-2 \leqslant 0.$

19. $|x^2-5x| < 6.$

20. $|x^2-2x| \leqslant x.$

21. $|x-4| > x^2-7x+12.$

22. $x^2-5x+9 \leqslant |x-6|.$

23. $3x^2-|x-3| \geqslant 9x-2.$

24. $|x-6| > |x^2-5x+9|.$

25. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{|x|} \geqslant 2.$

26. $\dfrac{3}{|x-1|} \geqslant 2x+5.$

27. $\dfrac{|x+3|-1}{4-2|x+4|} \geqslant -1.$

28. $\dfrac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leqslant 2.$

29. $\dfrac{|1-x|+10}{4|x-1|+3} > 2.$

30. $\dfrac{1}{|x+1|-1} \geqslant \dfrac{2}{|x+1|-2}.$

§ 6. Тригонометрические уравнения и неравенства

Решение практически любого тригонометрического уравнения или неравенства предполагает умение решать их *простейшие* варианты вида

$$\sin x \vee a,$$
$$\cos x \vee a,$$
$$\operatorname{tg} x \vee a,$$
$$\operatorname{ctg} x \vee a.$$

Простейшие ***тригонометрические уравнения*** решаются соответственно по формулам

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x = a \quad &\Leftrightarrow \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \\ \cos x = a \quad &\Leftrightarrow \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \\ \operatorname{tg} x = a \quad &\Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \\ \operatorname{ctg} x = a \quad &\Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \end{aligned}}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, причём выражения $\arcsin a$ и $\arccos a$ определены тогда и только тогда, когда[1] $|a| \leqslant 1$.

Эти формулы полезно просто помнить наизусть. Однако они резко упрощаются в некоторых частных случаях, и запоминать их все представляется уже несколько обременительным.

Поэтому не менее полезно уметь иллюстрировать эти формулы на *единичной окружности*. Тем более что именно к ней восходит и непосредственный вывод формул корней, и само определение тригонометрических функций.

Что же касается простейших ***тригонометрических неравенств***, то решать их явно[2], как правило, не требуется. Обычно, если они и возникают в процессе решения, то носят лишь второстепенный характер и могут быть учтены каким-либо косвенным образом: например, алгебраически (при отборе значений тригонометрической функции) или на единичной окружности (при отборе значений аргумента).

---

[1] В противном случае и соответствующие уравнения не имеют решений.

[2] То есть доводить до ответа.

Знание следующих *основных тригонометрических формул* совершенно необходимо:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ — *основное тригонометрическое тождество*;

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$;

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ — *синус двойного угла*;

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ — *косинус двойного угла*.

Пример 6.1. Найдите все корни уравнения

$$\sin 2x - 3 = 3\cos 2x$$

на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
&\sin 2x - 3 = 3\cos 2x;\\
&2\sin x\cos x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3(\cos^2 x - \sin^2 x);\\
&\cos x(\sin x - 3\cos x) = 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим случаи:

1) $\cos x = 0$;

$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$,

причём $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ при $n = -1 \quad (x = -\frac{\pi}{2})$;

2) $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \operatorname{tg} x = 3 \end{cases}$

$x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$,

причём $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ при $k = 0 \quad (x = \operatorname{arctg} 3)$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 3$.

Существует также масса полезных *вспомогательных* тригонометрических формул (каждая из которых справедлива только на общей области определения её левой и правой частей):

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ — *косинус двойного угла*;

$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ — *тангенс двойного угла*;

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ — *синус суммы*;

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$ — *синус разности*;

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ — *косинус суммы*;

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$ — *косинус разности*;

$\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ — *тангенс суммы*;

$\operatorname{tg}(x-y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ — *тангенс разности*;

$2\sin^2 \dfrac{x}{2} = 1 - \cos x$ — *синус половинного угла*;

$2\cos^2 \dfrac{x}{2} = 1 + \cos x$ — *косинус половинного угла*;

$\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ — *тангенс половинного угла*;

$\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ — *тангенс половинного угла*;

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

(где $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$) — *формулы универсальной подстановки*;

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2};$$

$$2\sin x\cdot\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y);$$

$$2\cos x\cdot\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y);$$

$$2\sin x\cdot\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y).$$

Кроме того, целый ряд формул, называемых *формулами приведения*, получается применением единого механизма к функциям определённого вида. А именно, пусть заданы тригонометрическая функция f и целое число n, тогда выражение $f\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$ приводится к виду $\pm g(x)$, причём:

• если n чётно, то функция g совпадает с функцией f, а если нечётно — то с кофункцией[1] для f;

• перед $g(x)$ ставится знак, одинаковый для всех x и совпадающий со знаком исходного выражения $f\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Пример 6.2. Решите уравнение

$$\sqrt{6\sin x}+2\cos x=0.$$

Решение.

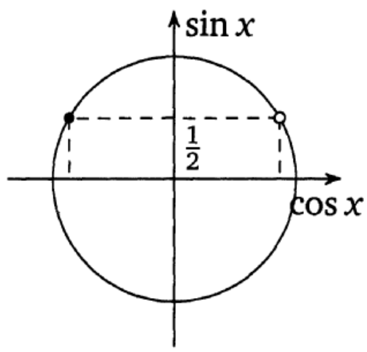
$$\sqrt{6\sin x}+2\cos x=0;$$

$$\begin{cases}\cos x\leqslant 0,\\ 6\sin x=4\cos^2 x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x\leqslant 0,\\ 3\sin x=2(1-\sin^2 x);\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x\leqslant 0,\\ (\sin x+2)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x\leqslant 0,\\ \sin x=\frac{1}{2}.\end{cases}$$



Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

[1] Кофункцией для синуса служит косинус, для косинуса — синус и т. д.

Тренировочные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $(\arccos x)^2 - 6\arccos x + 8 = 0.$

2. $\cos x(2\cos^2 x - 1) = \frac{1}{4}.$

3. $4\sin 2x\cos 2x - 3\sin^2 2x = 1.$

4. $2\sin^3 x - \sin^2 x\cos x + 2\sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$

5. $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x.$

6. $2\sin x\cos x - 6(\sin x - \cos x) + 6 = 0.$

7. $\sin 2x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\cos 2x = 1.$

8. $(3 - \operatorname{ctg}^2 x)\sin 2x = 2(1 + \cos 2x).$

9. $\operatorname{tg} 2x = 4\cos^2 x - \operatorname{ctg} x.$

10. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \operatorname{ctg}(\pi\sin x).$

11. $2\sin^2 x + \sin(x^2) = 1.$

12. $\operatorname{tg} x = (2 + \sqrt{3})\operatorname{tg}\frac{x}{3}.$

13. $\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 7x = 1.$

14. $\begin{cases} \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0, \\ \pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \cos 2x + \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{2}} = 0, \\ \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$

16. $\sqrt{\cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x - 3\cos^2 x + \cos x + \frac{13}{4}} = \sqrt{3}\sin x + \frac{1}{2}.$

17. $\sqrt{\operatorname{tg} x + \sin x} + \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos x.$

18. $\operatorname{tg}(\pi\cdot\operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi\cdot\operatorname{ctg} x).$

19. $2\cos x + \sqrt{2}\sin 28x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x\cdot\sin x.$

20. $\operatorname{tg}(14x) + 3\operatorname{ctg}(14x) + \sin 6x - 2\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3} + 1}.$

21. $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800})\right) = 1, \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

22. $\sqrt{15x^2+2y^2-2z^2-3\sqrt{5}x-2y+10z-4}+$
$$+\sqrt{5x^2-2\sqrt{5}x\cos(\pi y)\cos(\pi z)+1}=0.$$

23. $20\sin^2 x+9\cos x<21.$

24. $|\operatorname{tg} x|<\frac{1}{2}.$

25. $\operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2}\geqslant 1.$

26. $2\cos^2 x-(2+\sqrt{2})\cos x+\sqrt{2}>0.$

27. $|4\cos^2 x-1|+|4\cos^2 x|=2.$

28. $\sqrt{5-2\sin x}\geqslant 6\sin x-1.$

29. $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>1.$

30. $\sqrt{2+\sin x-\sqrt{3}\cos x}>1.$

31. $6\sin x\cdot\cos x>\sin x+\cos x+1.$

32. $\arcsin\left(x^2+x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(x^2+x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

33. $\arcsin 2x=\arccos|x|.$

34. $\sqrt{\arcsin x}+\sqrt{\arccos x}>\sqrt{\frac{7\pi}{12}}.$

35. $\sin(\sin x)+\sin x\cdot\cos(\sin x)>0.$

36. $\left|2\sin x+2\cos x+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right|\leqslant 2.$

37. $2\cos(\arcsin x)-\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)\leqslant 0.$

38. Сколько решений имеет уравнение $\arccos(\cos 2x)=\frac{2x}{2009}$?

39. $\arcsin(\sin x)+3\arccos(\cos x)\geqslant 3x-18.$

Подготовительные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $\sin x=\frac{\pi}{3}.$

2. $\cos x=\sqrt{3}.$

3. $\sqrt{2}\cos^2 7x=\cos 7x.$

4. $(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x.$

5. $2\cos 2x+\cos x=1.$

6. $\sqrt{3}\sin x-\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} x\cdot\sin x=\sqrt{3}.$

7. $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7.$

8. $3\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos^2 x.$

9. $3\operatorname{tg}^2 x + 7 = \dfrac{2}{\sin^2 x}.$

10. $\sin 3x + \sin x = \sin 2x.$

11. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x.$

12. $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$

13. $3\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 0.$

14. $\cos x + \sin x + 2\sin x \cdot \cos x = 1.$

15. $\cos 3x + \sin(9x + 2) = 0.$

16. $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x.$

17. $4\cos x + 3\sin x = 5.$

18. $2\cos 3x = \sqrt{3}\cos x - \sin x.$

19. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = 2.$

20. $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = (\sin x + \cos x)^2.$

21. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5\operatorname{tg} 2x + 7.$

22. $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}.$

23. $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1}{2}.$

24. $\dfrac{2\sin^4 \frac{x}{2} - 1}{\cos^4 \frac{x}{2}} = 2.$

25. $\sqrt{\sin x} + \cos x = 0.$

26. $\sin x > \frac{1}{2}.$

27. $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}.$

28. $\operatorname{tg} x < 1.$

29. $\arcsin x = \arccos x.$

30. $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x).$

§ 7. Комбинированные уравнения и неравенства

Одно уравнение или неравенство вполне может содержать выражения нескольких, причём самых разных, типов: степенные, логарифмические, тригонометрические и т. д.

Простейший выход из такой ситуации иногда даёт *замена неизвестной*, после которой задача приобретает стандартный вид. При этом совершенно не обязательно явно обозначать новую неизвестную отдельной буквой.

Пример 7.1. Решите неравенство

$$10^{x^{\lg x}} \cdot 10^{\sqrt{10}^{\lg^2 x}} < 1\,000\,000.$$

Решение.

$$10^{x^{\lg x}} \cdot 10^{\sqrt{10}^{\lg^2 x}} < 1\,000\,000 \quad (= 10^6),$$

$$x^{\lg x} + \sqrt{10}^{\lg^2 x} < 6,$$

$$10^{\lg^2 x} + \sqrt{10^{\lg^2 x}} - 6 < 0,$$

$$\left(\sqrt{10^{\lg^2 x}} + 3\right)\left(\sqrt{10^{\lg^2 x}} - 2\right) < 0,$$

$$\sqrt{10^{\lg^2 x}} < 2,$$

$$10^{\lg^2 x} < 4,$$

$$\lg^2 x < \lg 4,$$

$$-\sqrt{\lg 4} < \lg x < \sqrt{\lg 4},$$

$$10^{-\sqrt{\lg 4}} < x < 10^{\sqrt{\lg 4}}.$$

Ответ: $10^{-\sqrt{\lg 4}} < x < 10^{\sqrt{\lg 4}}$.

Существенно более трудными следует признать такие уравнения или неравенства, которые не сводятся к стандартному виду никакой заменой. Как правило, их решение опирается на специфические свойства функций: *монотонность, ограниченность, чётность* (нечётность), *периодичность* и т. п.

Для функций, обладающих определёнными свойствами, можно сформулировать вполне конкретные утверждения, помогающие решать некоторые уравнения или неравенства, например: *строго монотонная на всей своей области определения функция не может принимать одинаковых значений в разных точках.*

Пример 7.2. Решите уравнение

$$3^{3-2x} - \log_2(2-3x) = 3^{2-3x} - \log_2(3-2x).$$

Решение.

$$3^{3-2x} - \log_2(2-3x) = 3^{2-3x} - \log_2(3-2x);$$

$$3^{3-2x} + \log_2(3-2x) = 3^{2-3x} + \log_2(2-3x);$$

$$f(3-2x) = f(2-3x), \quad \text{где } f(t) = 3^t + \log_2 t \text{ возрастает},$$

$$3-2x = 2-3x;$$

$$x = -1.$$

Ответ: $x=-1$.

Следующее утверждение связано с ограниченностью разных частей уравнения или неравенства: *если все значения левой части — не меньше, а правой — не больше некоторой константы, то левая часть — не меньше правой, а их равенство друг другу возможно только тогда, когда обе они одновременно равны этой константе.*

Пример 7.3. Решите неравенство

$$5^{2x^2-2x+1} \leqslant \sqrt{3\sin(\pi x - \operatorname{arctg}\tfrac{4}{3}) + 4\cos(\pi x - \operatorname{arctg}\tfrac{4}{3})}.$$

Решение.

$$5^{2x^2-2x+1} \leqslant \sqrt{3\sin(\pi x - \varphi) + 4\cos(\pi x - \varphi)},$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, причём $\sin\varphi = \frac{4}{5}$ и $\cos\varphi = \frac{3}{5}$,

$$\sqrt{5}^{4x^2-4x+2} \leqslant \sqrt{5}\sqrt{\cos\varphi\cdot\sin(\pi x-\varphi) + \sin\varphi\cdot\cos(\pi x - \varphi)};$$

$$\sqrt{5}^{(2x-1)^2+1} \leqslant \sqrt{5}\sqrt{\sin\pi x};$$

$$\sqrt{5}^{(2x-1)^2+1} = \sqrt{5} = \sqrt{5}\sqrt{\sin\pi x}, \quad \text{т. к. } \sqrt{5}^{(2x-1)^2+1} \geqslant \sqrt{5} \geqslant \sqrt{5}\sqrt{\sin\pi x};$$

$$\begin{cases} 2x-1=0, \\ \sin\pi x = 1; \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Тренировочные задачи

1. Сколько различных корней имеет уравнение

$$\sqrt{6}x^2+2\sqrt{3}x+3=-2x?$$

2. Сколько различных корней имеет уравнение

$$\sqrt{6}(x^2+2)+2\sqrt{5}x=\sqrt[4]{35}(x^2-2)+2\sqrt{7}x?$$

Решите следующие уравнения и неравенства:

3. $\left(4|x-1|+\frac{1}{2}\right)^2=11(x-1)^2+\frac{5}{4}$.

4. $\frac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|}\leqslant\sqrt{4x-3}$.

5. $\sqrt{\log_{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}(x-2)}\geqslant 1$.

6. $\frac{1}{8}(\log_2(3x-2)^4)^2=\frac{\lg(2-3x)}{\lg 2}7^{2\log_7\sqrt{3}}$.

7. $\log_2\frac{1}{|x-1|-1}=1$.

8. $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$.

9. $2<\left|\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)-4\right|\leqslant 3$.

10. $1+\log_{\frac{1}{4}}(\log_3(4-x))>0$.

11. $\log_{\sqrt[4]{9}}(\log_{\frac{1}{3}}(x+2))\geqslant 2$.

12. $\log_3\left(\log_{\frac{1}{8}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x-\frac{1}{2}\right)\right)\leqslant -1$.

13. $2\log_{\sqrt{2}}3+\log_{\sqrt{2}}\left(3^{x^2-3}-\frac{1}{9}\right)<\log_{\sqrt{2}}26$.

14. $\log_2\left(\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)<\log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right)$.

15. $3^{\frac{(\log_3 x)^2}{4}}\leqslant\frac{x^{\frac{(\log_3 x)}{3}}}{3}$.

16. $\frac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3}\leqslant 1$.

17. $\log_{\frac{1}{3}}(2^{x+2}-4^x)\geqslant -2$.

18. $\log_x(\log_9(3^x-9))<1$.

19. $\frac{(x-0{,}5)(3-x)}{\log_2|x-1|}>0$.

20. $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2)>-2.$

21. $\log_{\frac{4}{3}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})+\log_{\frac{4}{9}}(\frac{2}{3})\geqslant 0.$

22. $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2}-x-1)\geqslant 1.$

23. $\log_x 2x\leqslant\sqrt{\log_x(2x^3)}.$

24. $\log_4(3^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3^x-1}{16}\right)\leqslant\frac{3}{4}.$

25. $\sqrt{(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+4\log_2\sqrt{x}}<\sqrt{2}(4-\log_{16}x^4).$

26. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}\geqslant 2.$

27. $\left(\frac{x}{10}\right)^{(\lg x)-2}<100.$

28. $49^{\log_x 5}-7^{\log_x 5}-2\geqslant 0.$

29. $\dfrac{21-2^x-2^{6-x}-|3-2^x|}{5-|2^x-3|}\geqslant 1.$

30. $(4x^2-16x+7)\log_2(x-3)>0.$

31. $\dfrac{\log_3(1-2x-x^2)}{\log_{3-\sqrt{5}}(x+1+\sqrt{2})}\geqslant 0.$

32. $\log_{(2-5x)}3+\dfrac{1}{\log_2(2-5x)}\leqslant\dfrac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}.$

33. $\sqrt{17\cdot 9^x-4^x}\geqslant 3^x-3\cdot 2^x.$

34. $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+2}-x+4)\geqslant -1+\log_{\frac{1}{2}}3.$

35. $\log_{2x-3}(\sqrt{x+2}+x-3)\leqslant 1.$

36. $\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5}>1.$

37. $(2+\sqrt{3})^x+2<(2-\sqrt{3})^x.$

38. $\log_{(\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3})}(4x-x^2-2)\geqslant 0.$

39. $\left(\frac{\lg x}{2}\right)^{\lg^2 x+\lg x^2-2}=\lg\sqrt{x}.$

40. $9^{-|x|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|+|x-1|}.$

41. $x^2\cdot 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2\cdot 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}.$

42. $x^2 2^{2x}+9(x+2)2^x+8x^2\leqslant(x+2)2^{2x}+9x^2 2^x+8x+16.$

43. $x^{\left(\frac{1}{2}\log_2^3 x-\frac{15}{2}\log_x 2\right)}\leqslant\sqrt{2}.$

44. $x^{\lg^2 x+\lg x^3+3} \leqslant \dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$.

45. $\log_{x^2}\left(\dfrac{4x-5}{|x-2|}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

46. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-15)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leqslant 1$.

47. $\dfrac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2} \geqslant 0$.

48. $\log_2(\sqrt{x^2-4x}+3) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}\right)+1$.

49. $\sqrt{x+1}-1 \leqslant x|x-2|-4x$.

50. $x(3x+2-2\sqrt{3-2x-x^2}) \geqslant 3|x|$.

51. $5^{\log_x 2} \cdot \log_2 x + 5^{\log_2 x} \cdot \log_x 2 \leqslant 10$.

52. $(x+\frac{8}{x}) \cdot \left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right| \geqslant 9 \cdot \left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|$.

53. $\left|\log_{x+1}\sqrt{(x-2)^4}+2\right| \geqslant -3+\log_{\frac{1}{x+1}}\sqrt{(x-2)^6}$.

54. $2^{\frac{5}{2}+2\cos 2x}-(2^{\frac{3}{2}}-1)4^{\cos^2 x} = -(2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}-1)}$.

55. $2\sin^2(\pi 2^{x+1})-4\sin(\pi 2^{x+1})+\sin(\pi 2^{x+2})+4\sin^2(\pi 2^x)=0$.

56. $|\cos x|^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1$.

57. $\log_{\frac{4-x^2-3x}{8}}(\cos x-\cos 3x)=\log_{\frac{4-x^2-3x}{8}}(\sin 2x)$.

58. $\log_{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin^2 x-\dfrac{5}{12}} < -1$.

59. $\log_{(\sin x-\cos x)}(\sin x-5\cos x) \geqslant 1$.

60. $\sqrt{4\sin^2 x-1} \cdot \log_{\sin x}\dfrac{x-5}{2x-1} \geqslant 0$.

61. $\log_2\left(\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)=\dfrac{1}{y^2-2y+2}$.

62. $\log_3|\pi x|+\log_{|\pi x|}3=\dfrac{2}{\sin^2(x+y)-2\sin(x+y)+2}$.

Подготовительные задачи

Решите уравнения и неравенства

1. $\sqrt{x^2+x+4} \leqslant 2x+|3x-2|$.

2. $\sqrt{|x+1|-1} \geqslant \sqrt{|x+1|-2010}$.

3. $\log_2\left|1+\frac{9}{x^2}\right|<1.$

4. $\left|\log_3(x+2)\right|>2.$

5. $\log_{\frac{1}{5}}(26-3^x)+2<0.$

6. $5^{\log_3\frac{2}{x+2}}<1.$

7. $\frac{\log_2(x+1)}{x-1}>0.$

8. $\frac{1-\log_{0,5}(-x)}{\sqrt{2-6x}}<0.$

9. $\sqrt{\log_2\left(\frac{3-2x}{1-x}\right)}<1.$

10. $\frac{3^x-2}{x^2-6x+5}\leqslant 0.$

11. $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5.$

12. $x^{2\lg x}=10x^2.$

13. $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2}<100.$

14. $x^{\lg^2 x-3\lg x+1}>1000.$

15. $3^{72}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}>1.$

16. $2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1.$

17. $2^x+2^{|x|}\geqslant 2\sqrt{2}.$

18. $\log_3(3^x-6)=x-1.$

19. $\log_3(4^x-3)+\log_3(4^x-1)=1.$

20. $\log_6 2^{x+3}-\log_6(3^x-2)=x.$

21. $\lg\sqrt{x+1}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}.$

22. $2(\lg 2-1)+\lg(5^{\sqrt{x}}+1)=\lg(5^{1-\sqrt{x}}+5).$

23. $3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{x^{-1}}=2.$

24. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)}>1.$

25. $\log_{\frac{4}{3}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})+\log_{\frac{4}{9}}\frac{2}{3}\geqslant 0.$

26. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1.$

27. $(0,5)^{\log_3\left(\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)\right)}<1.$

28. $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_3 x>1.$

29. $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} \geqslant 2.$

30. $\log_{(x^2+2x-3)} \dfrac{|x+4|-|x|}{x-1} > 0.$

31. $81^{(\sin 2x-1)\cos 3x} - 9^{(\sin x - \cos x)^2} = 0.$

32. $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^{\sin x} + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^{\sin x} = \dfrac{10}{3}.$

33. $\log_{\frac{-6x-x^2}{10}} (\sin 3x + \sin x) = \log_{\frac{-6x-x^2}{10}} \sin 2x.$

Диагностическая работа 1

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 < 0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{4^x+2x-4}{x-1} \leqslant 2.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x+1-\log_3 9x}{1-\log_3 x} \geqslant 1.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geqslant \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{3}{|x+3|-1} \geqslant |x+2|.$$

7. Решите уравнение

$$(2\sin^2 x - 3\sin x + 1)\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0.$$

8. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2+2x-x^2}+x-2}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right)+\log_3 2} \leqslant 0.$$

Диагностическая работа 2

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2-3x+24}{x^2-3x+3} < 4.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{(x+2)(x^2-2x+1)}{4+3x-x^2} \geqslant 0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{2^x+x-10}{2^x-8} \leqslant 1.$$

4. Решите неравенство

$$\log_x \frac{2x-1}{x-1} > 1.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} > 1.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{(x+1)(x+2)}{x^2-|x|-2} \geqslant -3x.$$

7. Решите уравнение

$$\sqrt[4]{12}\sin x = \sqrt{\sin 2x}.$$

8. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(5^{1+\lg x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\lg x}\right) \geqslant -1+\lg x.$$

Диагностическая работа 3

1. Решите неравенство

$$\frac{2x+3}{3x+2} \geqslant \frac{4x+1}{x+4}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{20}{(x-3)(x-4)} + \frac{10}{x-4} + 1 > 0.$$

3. Решите неравенство

$$x^2 3^x - 3^{x+1} \leqslant 0.$$

4. Решите неравенство

$$(x+1)\log_8(x^2+2x-2) < 0.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \leqslant 0.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{x^2-1}{|x|-1} > 0.$$

7. Решите уравнение

$$(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - 2 + \sin x = 2\cos x.$$

8. Решите неравенство

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(x+2)}{x}.$$

Диагностическая работа 4

1. Решите неравенство

$$\frac{3x^2-2x-1}{2x^2+5x+3} < \frac{2x^2-3x+1}{3x^2+7x+4}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1.$$

3. Решите неравенство

$$(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}} \leqslant (\sqrt{5}+2)^{x-1}.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{x^2}(x^2+x-1) < 0.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geqslant 2.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|} \leqslant 0.$$

7. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.$$

8. Решите неравенство

$$\frac{(|2x+1|-x-2)(\log_{\frac{1}{3}}(x+4)+1)}{2^{x^2}-2^{|x|}} \geqslant 0.$$

Диагностическая работа 5

1. Решите неравенство

$$\frac{\frac{1}{x-1}-1}{1-\frac{1}{x-7}} \geqslant 0.$$

2. Решите неравенство

$$(x^2+3x)(2x+1)-16\frac{2x+3}{x^2+3x} \geqslant 0.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(x^2-2x-15)^{\frac{3}{2}}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leqslant 1.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{5-4x-x^2}(5-9x-2x^2) \leqslant \log_{1-x}(1-2x).$$

5. Решите неравенство

$$\sqrt{4x-x^2-3} \geqslant \sqrt{x^2-7x+12}-\sqrt{x^2-5x+6}.$$

6. Решите неравенство

$$||x^2-8x+2|-x^2| \geqslant 2x+2.$$

7. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{\sin x - 2\cos x - 1} = 0.$$

8. Решите уравнение

$$\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}}(x^2-4x-2) = \log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}(x^2-4x-3).$$

Диагностическая работа 6

1. Решите уравнение

$$\frac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2}=\frac{10}{9}.$$

2. Решите уравнение

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x}>\left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\log_{1-4x^2}(|x|-4)^2}{\log_{1-4x^2}(10x^2+5x+\frac{1}{2})}\leqslant 2.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}}-\sqrt{1-3^{-x}}}-\frac{3^{-x}-1}{\sqrt{1-9^{-x}}+3^{-x}-1}\geqslant\frac{1+\sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2}{10x^2-17x-6}\geqslant 0.$$

7. Найдите все решения неравенства

$$\sqrt{6\cos x-\sin x+4}<\sin x+\cos x$$

принадлежащие отрезку $[0;2\pi]$.

8. Решите неравенство

$$x\geqslant\log_2(101\cdot 10^x-10^{2+2x})-\log_5(101\cdot 2^x-5^{2+x}\cdot 2^{2+2x}).$$

Рекомендуемая литература

Для прохождения школьного курса математики необходим комплект школьных учебников, желательно из федерального комплекта, утверждённого Министерством образования РФ. При этом для подготовки к ЕГЭ, кроме учебников по математике, предназначенных для 10—11 классов, нужны также учебники по планиметрии для 7—9 классов и по алгебре для 8—9 классов.

Кроме учебников, особенно для изучения приёмов решения уравнений и неравенств, рекомендуем использовать проверенные временем методические пособия, задачники по элементарной математике, сборники конкурсных задач по математике. Вот некоторые из них.

1. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. М. И. Сканави. М.: Высшая школа, 1998 и др. издания.
2. *Моденов П. С.* Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. М.: Высшая школа, 1960.
3. *Моденов В. П.* Пособие по математике. Части I—II. М.: Издательство московского университета, 1977.
4. *Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х.* Математик для поступающих в вузы. М.: Дрофа, 1976 и др. издания.
5. *Мельников И. И., Сергеев И. Н.* Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. М. Учебно-научный центр довузовского образования МГУ, 1994.
6. *Шабунин М. И.* Математика для поступающих в вузы. М.: Лаборатория базовых знаний, 1999.
7. *Сергеев И. Н.* 1000 вопросов и ответов. Математика. М.: Университет книжный дом, 2000.
8. *Сергеев И. Н.* Математика задачи с ответами и решениями. М.: КДУ, 2003.
9. *Сергеев И. Н.* ЕГЭ. Математика. Задания типа С. М.: Экзамен, 2009.
10. *Шарыгин И. Ф.* Решение задач. М.: Просвещение,1994.
11. *Шарыгин И. Ф., Голубев В. И.* Факультативный курс по математике. Решение задач. М.: Просвещение, 1991.

12. *Голубев В. И.* Решение сложных и нестандартных задач по математике. М.: ИЛЕКСА, 2007.

13. Вступительные экзамены и олимпиады по математике / Под ред. И. Н. Сергеева. М.: Механико-математический факультет МГУ, разные годы.

14. Задачи вступительных экзаменов по математике / Под ред. Е. А. Григорьева. М.: Факультет Вычислительной математики и кибернетики МГУ, разные годы.

15. *Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф.* Сборник конкурсных задач по математике. М.: Наука, 1986.

16. *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Задачи вступительных экзаменов по математике. М.: Факториал, 1995.

17. *Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И.* Подготовка к ЕГЭ по математике. 2010. М.: МЦНМО, 2009.

18. *Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И.* Математика. ЕГЭ. Тематическая рабочая тетрадь. М.: Экзамен, 2010.

19. Математика. Сборник тренировочных работ / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. М.: МЦНМО, 2009.

20. Математика. ЕГЭ-2010. Типовые тестовые задания / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. М.: Экзамен, 2009.

21. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ-2010. Математика / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. М.: Астрель, 2009.

22. *Панфёров В. С., Сергеев И. Н.* Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач. ФИПИ; М.: Интеллект-Центр, 2010.

Мы не считаем, что все перечисленные пособия должны находиться в личной библиотеке абитуриента, да это и невозможно. Однако каждая из них по-своему полезна и найдёт своего благодарного читателя.

Ответы

Ниже допускаются ответы в разной форме: как в виде множеств, так и в виде равенств или неравенств (возможно, двойных). Как отмечалось ранее, главной характеристикой ответа была и остаётся его математическая правильность.

Диагностическая работа

1. $-1 \leqslant x \leqslant 2{,}5$. **2.** $x < -3$, $0 \leqslant x < 1$, $x = 3$. **3.** $x < -2$, $x > -2$. **4.** $x < -5$, $-2 \leqslant x < 2$, $x > -2$. **5.** $x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$. **6.** $-2 < x < -1$, $3 < x < 5$. **7.** $x = 2$. **8.** $-7 \leqslant x < -6$, $-5 \leqslant x \leqslant -1$, $x = 1$. **9.** $1 \leqslant x \leqslant 3$. **10.** $-2 < x < 2$, $2 < x < 14$. **11.** $x < -3$, $0 < x < 1$. **12.** $x = -\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 3$. **13.** $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **14.** $10^{-\sqrt{\lg 4}} < x < 10^{\sqrt{\lg 4}}$. **15.** $x = -1$. **16.** $x = \frac{1}{2}$.

§ 1. Показательные уравнения и неравенства

Тренировочные задачи

1. $x = 1$, $x = 2009$. **2.** $x = 1$, $x = -2011$. **3.** $x = -1$, $x = -2010$. **4.** $1 < x < 2009$. **5.** $-2011 \leqslant x \leqslant 1$. **6.** $x \leqslant -2010$, $x \geqslant -1$. **7.** $x = -3$, $x = 1$. **8.** $-3 < x < 1$. **9.** $x = -1$. **10.** $x = -1$. **11.** $x = -4$, $x = 2$. **12.** $x = -1$, $x = 12$. **13.** $-1 < x < 12$. **14.** $x = -2$, $x = 6$, $x = 3 - \sqrt{21}$, $x = 3 + \sqrt{21}$. **15.** $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 4)$. **16.** $(-\infty; -2] \cup (-1; 4)$. **17.** $(-\infty; -5] \cup (1; 2) \cup (6; +\infty)$. **18.** $-1 < x < 5$. **19.** $(-5; 1) \cup \{3\}$. **20.** $[1; 2) \cup (2; 4]$. **21.** $(-\infty; -1] \cup (4; +\infty)$. **22.** $(-1; 0) \cup (0; 1)$. **23.** $(-5; 1)$. **24.** $(-\infty; -\sqrt{7}) \cup (-2; \sqrt{7}) \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. **25.** $[1; 2) \cup (3; 4]$. **26.** $\left(-\frac{11 + \sqrt{737}}{28}; \frac{4}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{737} - 11}{28}; 1\right)$. **27.** $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **28.** $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(1; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. **29.** $(-5; 1) \cup (2; 3)$. **30.** $(-\infty; -3) \cup (-2; -1)$. **31.** $(-\infty; -4] \cup [-2; -1] \cup [1; +\infty)$. **32.** $(-\infty; -1] \cup (0; 1] \cup (2; 3]$. **33.** $-6 < x \leqslant 0$, $2 < x < 3$, $x \geqslant 6$. **34.** $-5 \leqslant x \leqslant 1$, $2 < x < 3$. **35.** $x < -9$, $\frac{2}{3} < x < 1$, $x \geqslant \frac{11}{2}$. **36.** $1 < x \leqslant 2$, $7 < x < 8$. **37.** $x \leqslant -1$, $2 \leqslant x < \frac{11}{4}$, $\frac{11}{4} < x \leqslant 3$, $x \geqslant 4$.

Подготовительные задачи

1. $x = 1$, $x = \frac{4}{3}$. **2.** $1 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$. **3.** решений нет. **4.** любое число. **5.** $x = -\frac{2}{3}$, $x = 3$. **6.** $x < -\frac{2}{3}$, $x > 3$. **7.** $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x = -1$, $x = 1$, $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **8.** $-\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < -1$, $1 < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **9.** $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. **10.** $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$. **11.** $x = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, $x = \sqrt[3]{3}$. **12.** $x < -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, $x > \sqrt[3]{3}$. **13.** $(1; 2) \cup (2; 3)$. **14.** $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$. **15.** $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(1; +\infty\right)$. **16.** $-\frac{1}{3} < x < \frac{4}{5}$. **17.** $x < \frac{3}{2}$, $x > \frac{5}{3}$.

18. любое действительное число. **19.** $x \leqslant 2$, $x \geqslant 4$. **20.** $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$. **21.** $(-\infty; 1) \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **22.** $-7<x<-3$. **23.** $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. **24.** $(-\infty; 0) \cup \cup (3; +\infty)$. **25.** $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. **26.** $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right] \cup [8; +\infty)$. **27.** $(-\infty; -20) \cup \cup (23; +\infty)$. **28.** $(-1; 0) \cup (4; +\infty)$. **29.** $[1; 3] \cup (5; +\infty)$. **30.** $-1 < x$. **31.** $\left(-\frac{9}{2}; -2\right) \cup (3; +\infty)$. **32.** $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **33.** $3 < x < 4$. **34.** $[-3; 0) \cup [20; +\infty)$. **35.** $(-\infty; -1] \cup (5; 6]$. **36.** $3 < x$. **37.** $x < -\sqrt{2}$, $x > \sqrt{2}$. **38.** $-2 < x < 2$. **39.** $x < 0$, $0 < x < 1$. **40.** $-4 \leqslant x < -1$, $-1 < x \leqslant 2$.

§ 2. Показательные уравнения и неравенства

Тренировочные задачи

1. $x=2$. **2.** $x=-1$. **3.** $x=1$. **4.** $x=1$, $x=2$. **5.** $x=\log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{3}{2}$. **6.** $x=3$. **7.** $x=0$. **8.** $x=0$, $x=2$. **9.** $x=10$. **10.** $x=\pm 1$. **11.** $x=-2$, $x=2$. **12.** $x=\frac{1}{4}$. **13.** $x=4$. **14.** $x=1$, $x=3$. **15.** $x=2$. **16.** $x=-\log_5 2$, $x=3$. **17.** $x<\frac{1}{2}$, $x>1$. **18.** $x \neq 2$. **19.** $x>-2$. **20.** $x<0$, $x>\log_4 3$. **21.** $x \in \mathbb{R}$. **22.** $x<0$, $x \geqslant 1$. **23.** $x>0$. **24.** $x<\log_{0,4} 2$. **25.** $-\frac{1}{2}<x<0$. **26.** $0<x<\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}$. **27.** $x \leqslant \log_3 \frac{1}{2}$, $\log_3 \frac{3}{5} \leqslant x < \log_3 \frac{5}{3}$. **28.** $x>\frac{1}{6}$. **29.** $-1<x<\frac{2}{3}$. **30.** $x<3-\sqrt{3}$, $x>3+\sqrt{3}$. **31.** $x>\frac{\lg 21}{\lg 5-\lg\sqrt{7}}$. **32.** $\frac{1}{2}\log_5 6<x<\log_6 5$.

Подготовительные задачи

1. $x=2$, $x=4$. **2.** $x=1$. **3.** $x=\frac{38}{3}$. **4.** $x=1$. **5.** $x=\log_{\frac{7}{3}} \frac{13}{8}$. **6.** $x=2$. **7.** $x=0$. **8.** $x=\pm 2$. **9.** $x=2$. **10.** $x=-2$. **11.** $x=2-\sqrt{\frac{7}{2}}$, $x=2+\sqrt{\frac{7}{2}}$. **12.** $x=0$. **13.** $x=0$. **14.** $x=-2$. **15.** $x=\log_{\frac{2}{7}} 3$. **16.** $x<\frac{1}{2}$. **17.** $x>-\frac{3}{4}$. **18.** $x<7$. **19.** $x<-\frac{1}{2}$, $x>\frac{5}{8}$. **20.** $\frac{5}{3}<x<2$. **21.** $1<x<4$. **22.** $x \leqslant 2$. **23.** $0<x<1$. **24.** $x>0$. **25.** $x<\log_5 10$. **26.** $x<\log_{0,4} 2$. **27.** $-\frac{1}{2}<x<0$. **29.** $x<0$, $1<x<3$. **30.** $0<x<\frac{1}{3}$, $x>4$.

§ 3. Логарифмические уравнения и неравенства

Тренировочные задачи

1. $x=1+\sqrt[3]{2}$. **2.** $x=3$. **3.** $x=2^{-1}$, $x=2^{-\frac{1}{8}}$. **4.** $x=2^{-2}$, $x=2^{-\frac{1}{4}}$. **5.** $x=2^{-3}$, $x=2$. **6.** $x=1$. **7.** $x=100$. **8.** $x=5$. **9.** $x=\frac{1}{81}$, $x=\frac{1}{3}$. **10.** $x=-\frac{3-\sqrt{3}}{3}$,

$x=8$. **11.** $x=\frac{1}{9}$, $x=3$. **12.** $x=2$. **13.** $x=2$, $x=1-\sqrt{33}$. **14.** $x=4$. **15.** $x=8$. **16.** $x=\frac{11\pm\sqrt{261}}{5}$. **17.** $1<x<2$, $3<x<4$. **18.** $-1\leqslant x<1$, $3<x\leqslant 5$. **19.** $\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{2}{3}$. **20.** $0<x<10$. **21.** $2<x<3$, $x>3$. **22.** $x>3$. **23.** $0<x\leqslant\frac{5}{8}$, $2\leqslant x<4$. **24.** $\frac{1}{2}<x<1$. **25.** $-3<x<1$, $3<x<4$. **26.** $-2<x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $x>2$. **27.** $0<x<2$, $x>4$. **28.** $-1<x<0$. **29.** $0<x<\frac{2}{\sqrt{5}}$, $1<x<3$. **30.** $3<x<4$, $x>6$. **31.** $2^{-\sqrt{2}}<x<\frac{1}{2}$, $1<x<2^{\sqrt{2}}$.

Подготовительные задачи

1. $x=0$. **2.** $x=\frac{3}{2}$, $x=10$. **3.** $x=1$. **4.** $x=-2-\sqrt{10}$. **5.** $x=\frac{1}{10}$, $x=10$. **6.** $x=10$, $x=10\,000$. **7.** $x=\frac{1}{4}$, $x=2$. **8.** $x=3$. **9.** $x=-4$. **10.** $x=3$. **11.** $x=4$. **12.** $x=\frac{1}{2}$, $x=16$. **13.** $x=-\frac{9}{5}$, $x=23$. **14.** $x=2$. **15.** $x=\frac{1}{2}$, $x=128$. **16.** $\frac{1}{5}<x<\frac{2}{5}$. **17.** $\frac{1}{3}<x<2$. **18.** $2<x<3$. **19.** $\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{1}{2}$. **20.** $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$. **21.** $0<x\leqslant\frac{1}{2}$, $2<x\leqslant 4$. **22.** $\frac{1}{10}<x<1$, $1<x\leqslant 10$. **23.** Решений нет. **24.** $1<x\leqslant 2$, $3\leqslant x<4$. **25.** $-\sqrt{5}<x<-2$, $1<x<\sqrt{5}$. **26.** $2<x<3$. **27.** $-3<x<-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}<x<3$. **28.** $4<x$. **29.** $0<x<1$, $\sqrt{3}<x<9$. **30.** $1<x<4$.

§ 4. Иррациональные уравнения и неравенства

Тренировочные задачи

1. $x=0$. **2.** $x=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$. **3.** $x=-\sqrt{3}$. **4.** $x=-5$. **5.** $x=5$. **6.** $x=8$. **7.** $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **8.** $x=9$. **9.** $x=2$. **10.** $x=-\frac{8}{3}$, $x=1$. **11.** $x=7$. **12.** $x=1$, $x=2$, $x=10$. **13.** $x=3\frac{1}{63}$, $x=3\frac{1}{728}$. **14.** $5\leqslant x\leqslant 10$. **15.** $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{5}$, $x=\frac{4}{5}$. **16.** $-1\leqslant x\leqslant 1$. **17.** $\frac{19}{3}\leqslant x<9$. **18.** $x\leqslant -2$, $-1\leqslant x<\frac{\sqrt{13}-1}{6}$. **19.** $x\leqslant -5$, $-\frac{4}{3}\leqslant x<4$. **20.** $x<-1$, $x>\frac{5}{3}$. **21.** $1\leqslant x$. **22.** $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<x\leqslant 1$. **23.** $-1\leqslant x<8$. **24.** $1<x<2$, $2<x<\frac{5+\sqrt{5}}{2}$. **25.** $1<x<\frac{5}{4}$, $\frac{5}{3}<x$. **26.** $0\leqslant x\leqslant 5$. **27.** $1<x\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **28.** $-1-\sqrt{13}\leqslant x\leqslant 0$, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{13}-1$. **29.** $x>\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$. **30.** $-5\leqslant x<2\sqrt{\sqrt{5}-2}-4$. **31.** $3\leqslant x<6$, $6<x<\frac{133}{2}-11\sqrt{6}$.

Подготовительные задачи

1. $x=6$. **2.** $x=\frac{1}{2}$, $x=1$. **3.** $x=-\sqrt{\frac{7}{3}}$, $x=\sqrt{\frac{7}{3}}$. **4.** $x=2$. **5.** $x=3$. **6.** $x=-8$, $x=27$. **7.** $x=1$. **8.** $x=\frac{5}{3}$. **9.** $x=3$. **10.** $x=-3$. **11.** $x=-\frac{5}{6}$. **12.** $x=4$.

13. $x=0$, $x=-\frac{3}{2}$. **14.** $x=5$. **15.** $x=-1$. **16.** $\frac{1}{2}<x\leqslant 2$. **17.** $4<x\leqslant 6$. **18.** $-1-\sqrt{5}<x\leqslant -3$, $1\leqslant x<\sqrt{5}-1$. **19.** $x<1$. **20.** $x=-1$, $x\geqslant 2$. **21.** $-\frac{1}{2}<x$. **22.** $5<x$. **23.** $\frac{5}{2}\leqslant x<3$. **24.** $-1\leqslant x<0$, $\frac{3}{5}<x\leqslant 1$. **25.** $-2\leqslant x<2$. **26.** $x<1$. **27.** $-33\leqslant x<3$. **28.** $x\leqslant -3$. **29.** $1<x$. **30.** $1\leqslant x<\frac{3}{2}$.

§ 5. Уравнения и неравенства с модулем

Тренировочные задачи

1. $x=-1$, $x=1$. **2.** $x=0$, $x=\frac{70}{13}$, $x=\frac{13}{2}$. **3.** $x=-25$, $x=3$. **4.** $x\leqslant\frac{4}{7}$. **5.** $x=-2$. **6.** $x=-12$, $0\leqslant x\leqslant 6$. **7.** $x=1$. **8.** $-\frac{7}{2}\leqslant x\leqslant\frac{15}{2}$. **9.** $2\leqslant x\leqslant 3$. **10.** $x=1$, $x=4$. **11.** $x<\frac{1}{3}$, $x>3$. **12.** $-9<x<0$. **13.** $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. **14.** $2<x<5$. **15.** $-5<x<3+2\sqrt{2}$. **16.** $x\leqslant -5-\sqrt{19}$, $x\geqslant\sqrt{2}-2$. **17.** $-7<x<-2$, $3<x<4$. **18.** $-6\leqslant x\leqslant -1$, $x\geqslant 0$. **19.** $x<2\sqrt{2}$, $x>2+2\sqrt{3}$. **20.** $-\frac{3+\sqrt{65}}{2}<x<3$. **21.** $-\frac{9+\sqrt{57}}{4}<x<-2$, $-2<x<-1$, $x>\frac{3}{2}$. **22.** $x<-199$, $-66<x<200$. **23.** $x<0$, $2<x$. **24.** $-5\leqslant x<-4$, $-2<x\leqslant -2+\sqrt{3}$. **25.** $x<-2$, $x>-1$. **26.** $-5<x<-2$, $2<x<3$, $3<x<5$. **27.** $\frac{3}{2}\leqslant x<2$. **28.** $x<3$. **29.** $x\leqslant -1$, $x\geqslant 0$. **30.** $0\leqslant x\leqslant\frac{8}{5}$, $x\geqslant\frac{5}{2}$.

Подготовительные задачи

1. $x\geqslant 1$. **2.** $x=\frac{4}{3}$. **3.** $x=-\frac{9}{2}$, $x=\frac{13}{4}$. **4.** $x\geqslant 2$. **5.** $x=-3$, $x=3$. **6.** $x\leqslant\frac{3}{2}$. **7.** $x=-1$, $x=1$. **8.** $x=1$, $x=13$. **9.** $x=3$, $x=4$. **10.** $x=-4$, $x=-1$. **11.** $2<x<3$. **12.** $x\leqslant\frac{1}{6}$, $x\geqslant\frac{3}{2}$. **13.** $x\geqslant -1$. **14.** $x\leqslant -2$, $x\geqslant 2$. **15.** $x>\frac{9}{2}$. **16.** Решений нет. **17.** $-3<x<-2$, $2<x<3$. **18.** $-2\leqslant x\leqslant 2$. **19.** $-1<x<2$, $3<x<6$. **20.** $1\leqslant x\leqslant 3$. **21.** $2<x<4$. **22.** $1\leqslant x\leqslant 3$. **23.** $x\leqslant\frac{4-\sqrt{19}}{3}$, $x\geqslant\frac{4+\sqrt{19}}{3}$. **24.** $1<x<3$. **25.** $-1<x<0$, $0<x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$. **26.** $x\leqslant -2$, $\frac{1}{2}\leqslant x<1$, $1<x\leqslant\frac{\sqrt{73}-3}{4}$. **27.** $x\leqslant -8$, $-6<x<-2$, $x>-2$. **28.** $x<2$, $x=3$, $x>4$. **29.** $\frac{3}{7}<x<\frac{11}{7}$. **30.** $-3<x<-2$, $x=-1$, $0<x<1$.

§ 6. Тригонометрические уравнения и неравенства

Тренировочные задачи

1. $x=\cos 2$. **2.** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{5}+2n\pi$; $x=\pm\frac{3\pi}{5}+2m\pi$, $k,n,m\in\mathbb{Z}$. **3.** $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.** $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **5.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

6. $x=(2k+1)\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ k,n\in\mathbb{Z}$. **7.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x=\frac{7\pi}{20}+n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **8.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+m\pi;\ k,n,m\in\mathbb{Z}$. **9.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2};\ k,n\in\mathbb{Z}$. **10.** $x=2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **11.** $x=\pm1+\sqrt{1+\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $x=\pm1-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}+2k\pi};\ k=0,1,2,\ldots$ **12.** $x=3k\pi,\ x=-\frac{\pi}{4}+3n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **13.** $x=\frac{2n+1}{18}\pi;\ n\in\mathbb{Z},\ n\neq 9k+4,\ k\in\mathbb{Z}$. **14.** $x=\frac{21\pi}{16},\ x=\frac{11\pi}{8}$. **15.** $x=\frac{19\pi}{12}$. **16.** $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ x=\frac{3\pi}{4}+2n\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+2m\pi,\ k,n,m\in\mathbb{Z}$. **17.** $x=k\pi,\ x=\frac{\pi}{6}+$ $+2n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **18.** $x=\operatorname{arctg}\frac{2k+1\pm\sqrt{4k^2+4k-15}}{4}+n\pi,\ x=\pm\operatorname{arctg}2+m\pi;$ $k=3,\pm4,\pm5,\ldots,\ n,m\in\mathbb{Z}$. **19.** $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **20.** $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ x=\frac{\pi}{6}+2n\pi;$ $k,n\in\mathbb{Z}$. **21.** $x=-31,\ x=-7$. **22.** $x=\frac{1}{\sqrt{5}},\ y=2,\ z=0;\quad x=\frac{1}{\sqrt{5}},\ y=-1,$ $z=5$. **23.** $2k\pi\leqslant x<\arccos\frac{1}{4}+2k\pi,\ \arccos\frac{1}{5}+2n\pi<x<-\arccos\frac{1}{5}+2(n+1)\pi,$ $-\arccos\frac{1}{4}+2(m+1)\pi<x\leqslant 2(m+1)\pi;\ k,n,m\in\mathbb{Z}$. **24.** $\pi k-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<x<$ $<\pi k+\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\ k\in\mathbb{Z}$. **25.** $-\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$. **26.** $\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<-\frac{\pi}{4}+$ $+(2k+1)\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **27.** $x=\pm\arccos\sqrt{\frac{3}{8}}+\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$. **28.** $\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+$ $+2(k+1)\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **29.** $2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **30.** $\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi;$ $k\in\mathbb{Z}$. **31.** $2\left(\pi k+\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{2}}{7}\right)<x<2\left(\pi k+\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{2}}{7}\right);\ k\in\mathbb{Z}$. **32.** $x=-1$, $x=0$. **33.** $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **34.** $\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\sqrt{35}}{6}\right)\right)<x<\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\sqrt{35}}{6}\right)\right)$. **35.** $2k\pi<$ $<x<(2k+1)\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **36.** $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **37.** $-1\leqslant x\leqslant-\frac{7}{8},\ x=1$. **38.** 2009. **39.** $x\leqslant\frac{4\pi+18}{5},\ 8\pi-18\leqslant x\leqslant 18-3\pi$.

Подготовительные задачи

1. решений нет. **2.** решений нет. **3.** $x=\frac{\pi}{14}+\frac{k\pi}{7},\ x=\pm\frac{\pi}{28}+\frac{2n\pi}{7};\ k,n\in\mathbb{Z}$. **4.** $x=(2k+1)\pi,\ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **5.** $x=(2k+1)\pi,\ x=\pm\arccos\frac{3}{4}+$ $+2n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **6.** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ x=-\frac{\pi}{3}+n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **7.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}$. **8.** $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$. **9.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **10.** $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ x=\frac{n\pi}{2};$ $k,n\in\mathbb{Z}$. **11.** $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ x=2n\pi,\ x=\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **12.** Решений нет. **13.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi n,\ x=-\operatorname{arctg}3+\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **14.** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ x=2n\pi;$ $k,n\in\mathbb{Z}$. **15.** $x=-\frac{1}{3}+\frac{4k-1}{12}\pi,\ x=-\frac{1}{6}+\frac{4n-1}{24}\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **16.** $x=\frac{k\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}$.

17. $x=\arccos\frac{4}{5}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **18.** $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{12}+n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **19.** $x=$ $=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **20.** $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ x=n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **21.** $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi$, $x=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **22.** $x=\pm\frac{\pi}{2}+\frac{3k\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}$. **23.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{8}+$ $+\frac{n\pi}{4};\ k,n\in\mathbb{Z}$. **24.** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **25.** $x=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. **26.** $\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **27.** $\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **28.** $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **29.** $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **30.** $x=\pm\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

§ 7. Комбинированные уравнения и неравенства

Тренировочные задачи

1. 2. **2.** 1. **3.** $x=\frac{4}{5},\ x=\frac{6}{5}$. **4.** $\frac{3}{4}<x\leqslant 7$. **5.** $2<x\leqslant 2+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}$. **6.** $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{2(1-\sqrt{2})}{3}$. **7.** $x=-\frac{1}{2},\ x=\frac{5}{2}$. **8.** $x=\frac{1}{9},\ x=9$. **9.** $\left[-\frac{127}{384};-\frac{21}{64}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right]$. **10.** $-77<x<3$. **11.** $-2<x\leqslant-\frac{53}{27}$. **12.** $0\leqslant x<1$. **13.** $-2<x<-1,\ 1<x<2$. **14.** $x<-2$. **15.** $0<x\leqslant 3^{-2\sqrt{3}},\ x\geqslant 3^{2\sqrt{3}}$. **16.** $\log_3\frac{9}{10}\leqslant x<2$. **17.** $x<2$. **18.** $x>\log_3 10$. **19.** $0<x<\frac{1}{2},\ 2<x<3$. **20.** $\log_2\frac{5}{4}<x<\log_2 3$. **21.** $0\leqslant x\leqslant$ $\leqslant\frac{27}{16}$. **22.** $-\sqrt{8}\leqslant x<-1,\ 1<x\leqslant\frac{\sqrt{44}-2}{5}$. **23.** $0<x\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ x>2$. **24.** $[1;2]$. **25.** $0<x\leqslant\frac{1}{4},\ 1\leqslant x<4$. **26.** $0<x\leqslant\frac{1}{4},\ x\geqslant 4$. **27.** $1<x<1000$. **28.** $1<$ $<x\leqslant 5^{\log_2 7}=7^{\log_2 5}$. **29.** $x>3$. **30.** $3<x<\frac{7}{2},\ x>4$. **31.** $-2\leqslant x<-\sqrt{2}$, $0\leqslant x<-1+\sqrt{2}$. **32.** $-\frac{1}{3}\leqslant x<0,\ \frac{1}{5}<x<\frac{3-\sqrt{3}}{6}$. **33.** $x\geqslant\log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{17}}$. **34.** $-1\leqslant$ $\leqslant x<7,\ x=-2$. **35.** $\frac{3}{2}<x<2,\ x>2$. **36.** $x<-7,\ -5<x\leqslant-3,\ x>2$. **37.** $x<$ $<\log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{2}-1)$. **38.** $2-\sqrt{2}<x\leqslant 1,\ 3\leqslant x<2+\sqrt{2}$. **39.** $x=\frac{1}{1000},\ x=10$, $x=100$. **40.** $x=-\log_3 2,\ x=\log_3 2$. **41.** $x=-\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{2},\ x\geqslant 3$. **42.** $-1\leqslant x\leqslant 0$, $2\leqslant x\leqslant 3$. **43.** $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1,\ 1<x\leqslant 4$. **44.** $0<x\leqslant\frac{1}{100},\ \frac{1}{10}\leqslant x\leqslant 1$. **45.** $\sqrt{6}-1\leqslant$ $\leqslant x<2,\ 2<x\leqslant 5$. **46.** $x\leqslant-3,\ x=5$. **47.** $x<-2,\ -2<x<2-\sqrt{15},\ x\geqslant 6$. **48.** $-1\leqslant x\leqslant 0$. **49.** $0\leqslant x\leqslant 4$. **50.** $-3\leqslant x\leqslant\frac{8\sqrt{3}-19}{13},\ x=0,\ \frac{11}{13}\leqslant x\leqslant 1$. **51.** $0<x<1,\ x=2$. **52.** $x=3,\ x\geqslant 8$. **53.** $-1<x\leqslant\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ 0<x\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x\geqslant\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. **54.** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **55.** $x=\log_2\left(k+\frac{1}{4}\right),\ k=0,1,2,\ldots;\ x=\log_2 n,\ n=1,2,\ldots$ **56.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$,

$x=n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **57.** $x=\frac{\pi}{6}$. **58.** $\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **59.** $\operatorname{arctg}5+2k\pi<$ $<x<(2k+1)\pi,\ x\neq\frac{\pi}{2}+2n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **60.** $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ x\neq\frac{\pi}{2}+2n\pi;$ $k=1,\pm2,\pm3,\ldots,\ n\in\mathbb{Z},\ -\frac{11\pi}{6}\leqslant x<-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2}<x\leqslant-4,\ x=-\frac{7\pi}{6}$. **61.** $x=k\pi$, $y=1;\ k\in\mathbb{Z}$. **62.** $x=\frac{3}{\pi},\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi n-\frac{3}{\pi};\ x=-\frac{3}{\pi},\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi k+\frac{3}{\pi};\ k,n\in\mathbb{Z}$

Подготовительные задачи

1. $x\leqslant0,\ x\geqslant\frac{7}{8}$. **2.** $x\leqslant-2011,\ x\geqslant2009$. **3.** $x<-3,\ x>3$. **4.** $-2<x<-\frac{17}{9}$, $x>7$. **5.** $x<0$. **6.** $x>0$. **7.** $-1<x<0,\ x>1$. **8.** $-\frac{1}{2}<x<0$. **9.** $x>2$. **10.** $x\leqslant\log_3 2,\ 1<x<5$. **11.** $x=-2-\sqrt{10}$. **12.** $x=\sqrt{10^{1-\sqrt{3}}},\quad x=\sqrt{10^{1+\sqrt{3}}}$. **13.** $1<x<10000$. **14.** $x>1000$. **15.** $0\leqslant x<64$. **16.** $x=-3,\ x\geqslant-1$. **17.** $x\leqslant\log_2(\sqrt{2}-1),\ x\geqslant\frac{1}{2}$. **18.** $x=2$. **19.** $x=1$. **20.** $x=\log_3 4$. **21.** $x=0$. **22.** $x=9$. **23.** $x=10,\ x=10^4$. **24.** $(-\sqrt{2}-1;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\sqrt{2}+1)$. **25.** $0\leqslant x\leqslant$ $\leqslant\frac{27}{16}$. **26.** $1<x<4$. **27.** $-1<x<-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}<x<1$. **28.** $0<x<10^{\frac{\lg0,5\cdot\lg3}{\lg1,5}}$. **29.** $0<x\leqslant\frac{1}{4},\ x\geqslant4$. **30.** $-1-\sqrt{5}<x<-3,\ \sqrt{5}-1<x<5$. **31.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2n\pi}{3};\ k,n\in\mathbb{Z}$. **32.** $x=\pm\arcsin\frac{\lg3}{\lg(\sqrt{2}+\sqrt{3})}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **33.** $x=-\frac{5\pi}{3}$.

Диагностическая работа 1

1. $x<1,\ \frac{3}{2}<x<2,\ x>3$. **2.** $-5<x<1,\ 2<x<3$. **3.** $\frac{1}{2}\leqslant x<1$. **4.** $[2;3]$. **5.** $-2\leqslant x\leqslant-1,\ x=3$. **6.** $-5\leqslant x<-4,\ -2<x\leqslant-2+\sqrt{3}$. **7.** $x=n\pi,\ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi;$ $n,k\in\mathbb{Z}$. **8.** $1-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ 2<x<\frac{5}{2}$.

Диагностическая работа 2

1. $x<-1,\ x>4$. **2.** $x\leqslant-2,\ -1<x<4$. **3.** $2\leqslant x<3$. **4.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1}{2}$, $1<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **5.** $x<-7,\ -5<x\leqslant-3,\ x\geqslant2$. **6.** $\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant1,\ x>2$. **7.** $x=n\pi$, $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ n,k\in\mathbb{Z}$. **8.** $\frac{1}{10}<x\leqslant\frac{1}{2}$.

Диагностическая работа 3

1. $-4<x\leqslant-1,\ -\frac{2}{3}<x\leqslant1$. **2.** $x<-2,\ -1<x<3,\ 4<x$. **3.** $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant3$. **4.** $x<-3,\ -1+\sqrt{3}<x<1$. **5.** $-3<x<0,\ x=\frac{1}{2},\ x=2$. **6.** $x<-1,\ -1<x<1$, $x>1$. **7.** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **8.** $-\frac{1}{2}<x<0$.

Диагностическая работа 4

1. $-\frac{3}{2} < x < -\frac{4}{3}$, $-1 < x < 1$. **2.** $x < -7$, $-4 < x < -2$. **3.** $-2 \leqslant x < -1$, $x \geqslant 1$. **4.** $-2 < x < -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **5.** $x < 0$, $1 \leqslant x \leqslant 2$. **6.** $x < \frac{1}{3}$. **7.** $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. **8.** $-4 < x \leqslant 1$.

Диагностическая работа 5

1. $1 < x \leqslant 2$, $7 < x < 8$. **2.** $-4 \leqslant x < -3$, $-\frac{3}{2} \leqslant x < 0$, $x \geqslant 1$. **3.** $x \leqslant -3$, $x = 5$. **4.** $-5 < x < -2 - 2\sqrt{2}$, $-4 \leqslant x < 0$, $0 < x < \frac{1}{2}$. **5.** $x = 3$. **6.** $x \leqslant 0$, $1 \leqslant x \leqslant 2$, $x \geqslant 5$. **7.** $x = (2k+1)\pi$, $x = \pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2n\pi$; $k, n \in \mathbb{Z}$. **8.** $x = 2 + \sqrt{14 + 4\sqrt{3}}$, $x = 2 - \sqrt{14 + 4\sqrt{3}}$.

Диагностическая работа 6

1. $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$. **2.** $x = -\frac{2}{3}$, $x = 2$. **3.** $-\sqrt{2+\sqrt{3}} < x < -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $-\sqrt{2-\sqrt{3}} < x < 0$, $0 < x < \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{2+\sqrt{3}}$. **4.** $-\frac{1}{2} < x < \frac{-5-\sqrt{5}}{20}$, $\frac{-5+\sqrt{5}}{20} < x < 0$, $0 < x < \frac{-5+\sqrt{45}}{20}$, $\frac{-3+\sqrt{44}}{10} \leqslant x < \frac{1}{2}$. **5.** $x > 0$. **6.** $x \leqslant -2 - \sqrt{3}$, $-0{,}3 < x < -2 + \sqrt{3}$, $x = 1$, $x > 2$. **7.** $\frac{2\pi}{3} < x \leqslant 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{21}-1}{2}$. **8.** $x \leqslant -2$, $0 \leqslant x < \lg 101 - 2$.

Содержание

Сергеев Игорь Николаевич
Панфёров Валерий Семёнович

ЕГЭ 2010. Математика. Задача С3.

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Подписано в печать 16.03.2010 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 4,5. Тираж 5 000 экз. Заказ № 21761.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано по CtP-технологии в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский проспект, 15.

...о купить
...е «Математическая книга»
...сковского центра
непрерывного математического образования.

МЦНМО

Адрес магазина: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Проезд до станции метро «Смоленская» или «Кропоткинская», далее пешком.

Магазин работает ежедневно кроме воскресенья
с 11:00 до 20:00.

e-mail: biblio@mccme.ru
Адрес в Интернете: www.biblio.mccme.ru
Книга — почтой: biblio@mccme.ru

☎ (499) 241-7285 (495) 745-8031

☎ (495) 229-6759

КНИГОТОРГОВАЯ КОМПАНИЯ Абрис

Оптовые заказы: abrisd@textbook.ru
Розничные заказы: в интернет-магазине UMLIT.RU

ЕГЭ 2010
Математика

ISBN 978-5-94057-593-1
9 785940 575931